

**Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	D	C	C	B	C	C	C	D	C	B	A	A	A	C	A	B	D	D	C	A	C	A	C

**Schemat oceniania zadań otwartych****Zadanie 26. (0-2)**

Rozwiąż nierówność:  $2 - \frac{1-x^2}{2} \geq \frac{1}{2}(3x+1)$

**Rozwiązanie**

$$4 - 1 + x^2 \geq 3x + 1$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 - 3x + 2$ .

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1, \quad \sqrt{\Delta} = 1,$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2 \cdot 1} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2 \cdot 1} = 2.$$

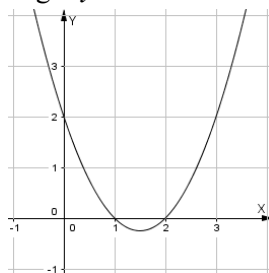
Możemy również obliczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 - 3x + 2$ , rozkładając go na czynniki liniowe

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$$

$$x-1=0 \text{ lub } x-2=0$$

$$x=1 \text{ lub } x=2$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego  $y = x^2 - 3x + 2$ ,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$$

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje.....1p.

gdy

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  i na tym zakończy lub błędnie poda zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np.  $(x-1)(x-2)$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- popęłni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje.....2p.**

gdy

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $x \in (-\infty; 1) \cup \langle 2; +\infty)$  lub  $(-\infty; 1) \cup \langle 2; +\infty)$  lub  $(x \leq 1$  lub  $x \geq 2)$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



**Zadanie 27. (0-2)**

Przedział  $(-\infty; 3)$  jest maksymalnym zbiorem, w którym funkcja  $f(x) = -2x^2 + bx - 16$  jest rosnąca. Wyznacz największą wartość tej funkcji.

**Rozwiązanie**

Przedział  $(-\infty; 3)$  jest maksymalnym zbiorem, w którym funkcja  $f$  jest rosnąca, więc argument  $x = 3$  jest pierwszą współrzędną wierzchołka  $W = (p, q)$  paraboli będącej wykresem tej funkcji.

**(I sposób rozwiązania)**

$$p = 3,$$

$$-\frac{b}{2a} = 3,$$

$$\frac{b}{4} = 3, \text{ więc } b = 12,$$

stąd:  $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$ .

Największą wartością funkcji jest  $y_{MAX} = f(3)$ .

$$f(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 16$$

$$f(3) = -18 + 36 - 16 = 2$$

Największa wartość funkcji można obliczyć również korzystając z odpowiednich wzorów:

$$y_{MAX} = q, \text{ gdzie } q = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-16) = 144 - 128 = 16$$

$$q = \frac{-16}{4 \cdot (-2)} = \frac{-16}{-8} = 2$$

**Odpowiedź:** Największą wartością funkcji jest  $y_{MAX} = 2$ .

**Rozwiązanie**

**(II sposób rozwiązania)**

Zapisujemy wzór funkcji w postaci kanonicznej

$$f(x) = -2(x-3)^2 + q,$$

$$f(x) = -2(x^2 - 6x + 9) + q$$

$$f(x) = -2x^2 + 12x - 18 + q$$

Zatem:

$$-18 + q = -16$$

$$q = 2$$

**Odpowiedź:** Największą wartością funkcji jest  $y_{MAX} = 2$ .

**Schemat oceniania**

**(I sposób rozwiązania)**

**Zdający otrzymuje.....1p.**

gdy

- wskaże wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka  $p = 3$  oraz obliczy wartość współczynnika  $b = 12$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu współczynnika  $b$  i konsekwentnie do obliczonej wartości  $b$  obliczy największą wartość funkcji.

**Zdający otrzymuje.....2p.**

gdy

obliczy największą wartość funkcji  $y_{MAX} = 2$ .

**(II sposób rozwiązania)**

**Zdający otrzymuje.....1p.**

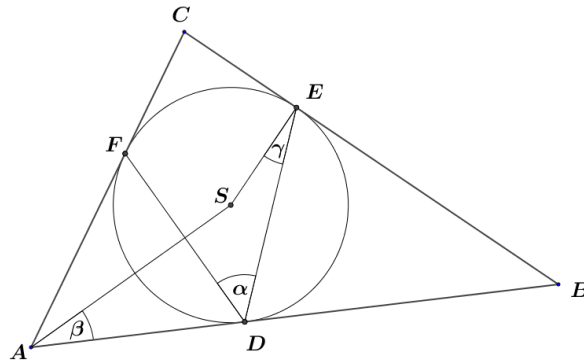
gdy zapisze trójmian kwadratowy w postaci  $f(x) = -2(x-3)^2 + q$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje.....2p.**

gdy obliczy największą wartość funkcji  $y_{MAX} = 2$ .

**Zadanie 28** (dowód geometryczny)

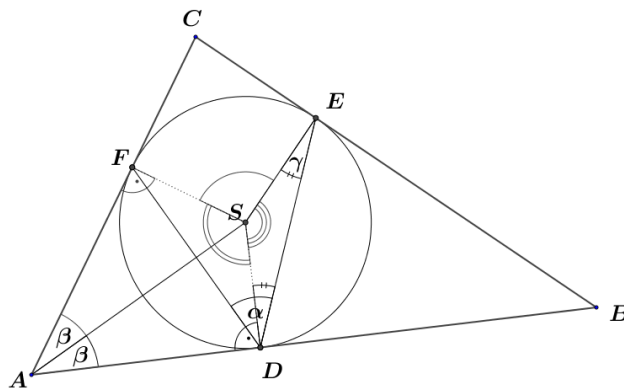
W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg o środku  $S$ , który jest styczny do boków trójkąta w punktach  $D, E$  i  $F$  (tak jak na rysunku). Uzasadnij, że  $\alpha = \beta + \gamma$ .



**Dowód**

Odcinki  $SD, SE, SF$  są prostopadłe do boków trójkąta.

**(I sposób rozwiązania)**



$|DS| = |ES|$ , zatem trójkąt  $DES$  jest równoramienny, stąd  $|\angle EDS| = \gamma$ .

Odcinek  $AS$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $\angle BAC$ , więc  $|\angle SAF| = \beta$ .

Zauważmy, że

- kąt wypukły  $\angle DSF$  ma miarę:  $|\angle DSF| = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 2\beta) = 180^\circ - 2\beta$ ,
- kąt wypukły  $\angle ESF$  ma miarę:  $|\angle ESF| = 2\alpha$ , (kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany  $|\angle EDF| = \alpha$ ),
- kąt wypukły  $\angle ESD$  ma miarę:  $|\angle ESD| = 180^\circ - 2\gamma$ ,

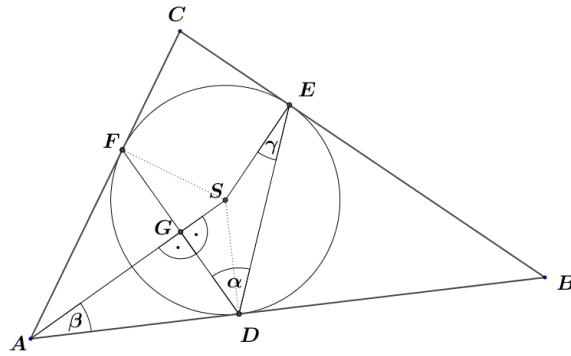
$$|\angle DSF| + |\angle ESF| + |\angle ESD| = 360^\circ,$$

$$180^\circ - 2\beta + 2\alpha + 180^\circ - 2\gamma = 360^\circ,$$

$$-2\beta + 2\alpha - 2\gamma = 0,$$

więc  $\alpha = \beta + \gamma$ , co należało uzasadnić.

**(II sposób rozwiązania)**



$|DS| = |ES|$ , zatem trójkąt  $DES$  jest równoramienny, stąd  $|\angle EDS| = \gamma$ .

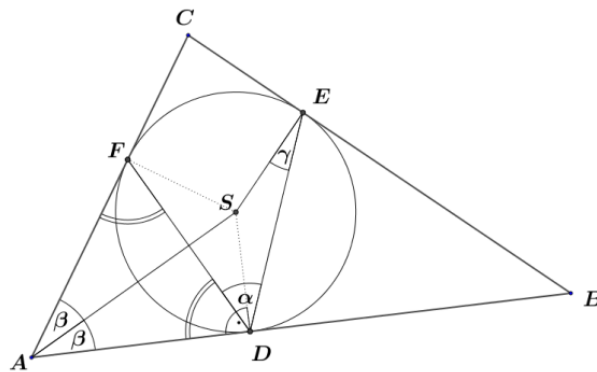
Odcinek  $AS$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $\angle BAC$ , więc  $|\angle SAF| = \beta$ .

Trójkąt  $DFA$  jest równoramienny ( $|AD| = |AF|$ ), więc odcinek  $AG$  jest wysokością trójkąta  $DFA$ , stąd  $|\angle SGD| = 90^\circ$ .

Trójkąt  $ASD$  jest podobny do trójkąta  $DSG$ , gdyż są trójkąty prostokątne, w których kąty ostre  $\angle DSG$  i  $\angle ASD$  mają równe miary. Wynika stąd, że  $|\angle SDG| = |\angle SAD| = \beta$ .

$|\angle EDF| = |\angle SDG| + |\angle EDS|$ , więc  $\alpha = \beta + \gamma$ , co należało uzasadnić.

**(III sposób rozwiązania)**



$|DS| = |ES|$ , zatem trójkąt  $DES$  jest równoramienny, stąd  $|\angle EDS| = \gamma$ .

Odcinek  $AS$  zawiera się w dwusiecznej kąta  $\angle BAC$ , więc  $|\angle SAF| = \beta$ .

Trójkąt  $DFA$  jest równoramienny ( $|FA| = |DA|$ ), więc  $|\angle FDA| = |\angle DFA| = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$

$|\angle SDA| = 90^\circ$ , więc  $|\angle SDF| = 90^\circ - |\angle FDA|$ .

$|\angle SDF| = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$

$|\angle EDF| = |\angle FDS| + |\angle SDE|$ , więc  $\alpha = \beta + \gamma$ , co należało uzasadnić.

**Schemat punktowania**

**(I sposób rozwiązania)**

**Zdający otrzymuje.....1p.**

- gdy uzasadni, że  $|\angle EDS| = \gamma$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- gdy zapisze, że  $|\angle DSF| = 180^\circ - 2\beta$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze, że  $|\angle ESF| = 2\alpha$  oraz  $|\angle DAF| = 2\beta$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje.....2p.**

gdy uzasadni, że  $\alpha = \beta + \gamma$ .

**(II i III sposób rozwiązania)**

**Zdający otrzymuje.....1p.**

gdy uzasadni, że  $|\angle EDS| = \gamma$  lub  $|\angle FDS| = \beta$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje.....2p.**

gdy uzasadni, że  $\alpha = \beta + \gamma$ .

**Zadanie 29. (0-2)**

Udowodnij, że nierówność  $(x + y)^2 + 10 \geq 2(x - 3y + xy)$  jest spełniona dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ .

**Rozwiązanie**

**(I sposób)**

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 + 10 &\geq 2(x - 3y + xy) \\ x^2 + 2xy + y^2 + 10 &\geq 2x - 6y + 2xy \\ x^2 + y^2 + 10 - 2x + 6y &\geq 0 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) &\geq 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą dwóch liczb nieujemnych (kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny), więc to dowodzi, że nierówność  $(x + y)^2 + 10 \geq 2(x - 3y + xy)$  jest spełniona dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ .

To kończy dowód.

**(II sposób)**

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$(x + y)^2 + 10 \geq 2(x - 3y + xy)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 10 \geq 2x - 6y + 2xy$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10 \geq 0$$

Potraktujmy tę nierówność jako zwykłą nierówność kwadratową z niewiadomą  $x$ .

Aby nierówność ta była spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste wyróżnik trójmianu musi być niedodatni, tzn:  $\Delta \leq 0$ .

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 + 6y + 10)$$

$$\Delta = 4 - 4y^2 - 24y - 40 = -4y^2 - 24y - 36$$

$$\Delta = -4(y^2 + 6y + 9)$$

$$\Delta = -4(y + 3)^2$$

$$\Delta = -4(y + 3)^2$$

$\Delta \leq 0$  dla dowolnych  $y \in R$ , więc nierówność  $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10 \geq 0$  jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste  $x$  i  $y$ .

To kończy dowód.

### Schemat oceniania

#### (I sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje .....1p.

gdy doprowadzi nierówność do postaci  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \geq 0$ ,

Zdający otrzymuje .....2p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

#### (II sposób rozwiązania)

Zdający otrzymuje .....1p.

- gdy doprowadzi nierówność do postaci  $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10 \geq 0$  i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego  $\Delta = -4y^2 - 24y - 36$ ,

albo

- gdy doprowadzi nierówność do postaci  $y^2 + 6y + x^2 - 2x + 10 \geq 0$  i prawidłowo wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego  $\Delta = -4x^2 + 8x - 4$ .

Zdający otrzymuje .....2p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 30. (0-2)**

W pudełku znajduje się siedem kul ponumerowanych od 1 do 7. Losujemy kolejno dwie kule, bez zwracania, zapisując wyniki w liczbę dwucyfrową. Pierwsza wylosowana liczba jest cyfrą jedności, druga cyfrą dziesiątek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 3 lub przez 5.

**Rozwiązanie****(I sposób)**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe o różnych cyfrach ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$\bar{\Omega} = 7 \cdot 6 = 42$$

Oznaczmy przez  $A$  zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby, która jest podzielna przez 3 lub przez 5.

$$A = \{12, 15, 21, 24, 25, 27, 35, 36, 42, 45, 51, 54, 57, 63, 65, 72, 75\}$$

$$\bar{A} = 17$$

Obliczamy prawdopodobieństwo korzystając z definicji klasycznej prawdopodobieństwa

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$$

$$P(A) = \frac{17}{42}$$

**(II sposób)**

Oznaczmy przez  $A$  zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby, która jest podzielna przez 3 lub przez 5.

Zbiór zdarzeń elementarnych można zilustrować tabelą 7 na 7 i zaznaczyć zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ .

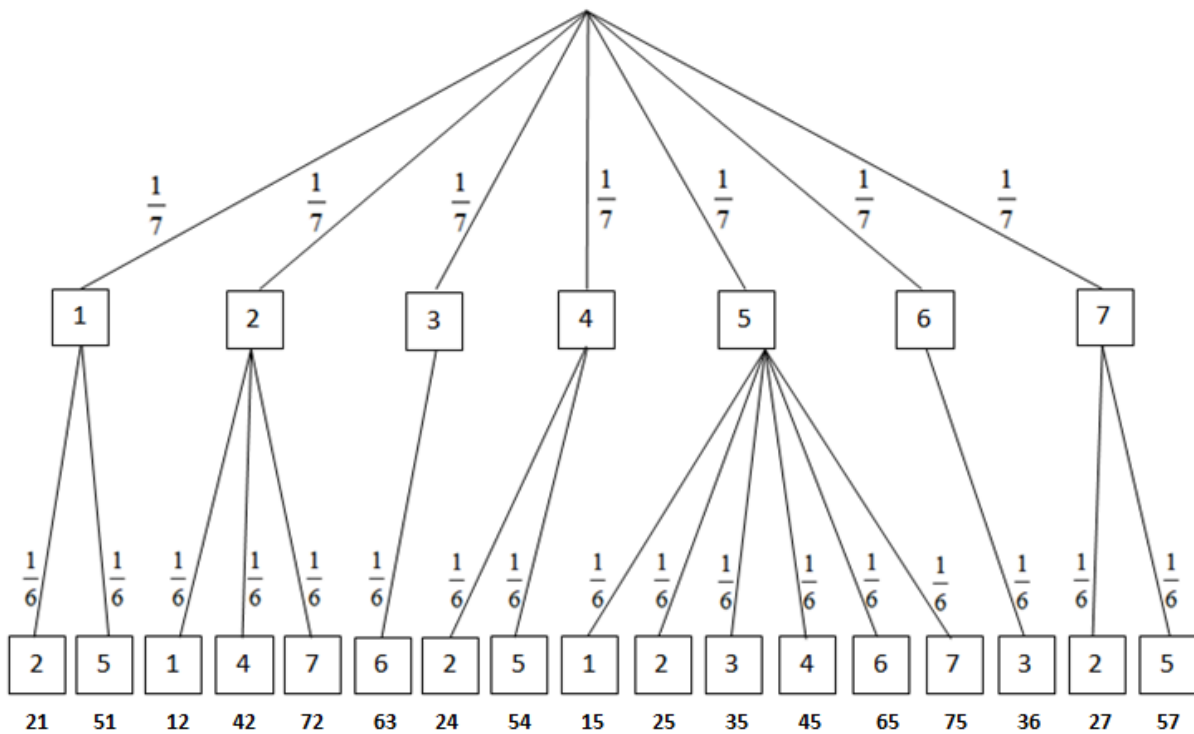
	1	2	3	4	5	6	7
1	X	21	31	41	51	61	71
2	12	X	32	42	52	62	72
3	13	23	X	43	53	63	73
4	14	24	34	X	54	64	74
5	15	25	35	45	X	65	75
6	16	26	36	46	56	X	76
7	17	27	37	47	57	67	X

Łatwo zauważyć, że  $\bar{\Omega} = 42$  i  $\bar{A} = 17$ , więc  $P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{17}{42}$



**(III sposób)**

Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A (polegającemu na tym, że otrzymana liczba będzie podzielna przez 3 lub przez 5).



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe  $P(A) = 17 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{42}$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje.....1p.**

- gdy zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych  $\overline{\Omega} = 6 \cdot 7$ ,  
albo
- gdy wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A,  
albo
- gdy zapisze liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A :  $\overline{A} = 17$ ,  
albo
- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie).

**Zdający otrzymuje.....2p.**

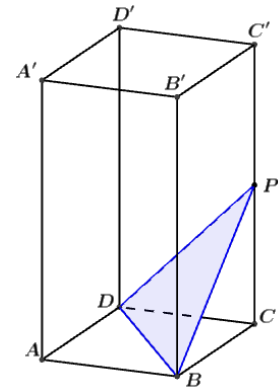
gdy wyznaczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $P(A) = \frac{17}{42}$ .

**Uwaga.**

1. jeżeli zdający poda prawdopodobieństwo zdarzenia A większe od 1, to za całe zadanie otrzymuje **0p**,
2. jeżeli zdający pominie jedno zdarzenie sprzyjające zdarzeniu A lub pominie jedną istotną gałąź drzewa i otrzyma  $P(A) = \frac{16}{42} = \frac{8}{21}$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **1p**.

**Zadanie 31. (0-2)**

Gnaniastosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy  $BD$  i punkt  $P$ , który jest środkiem krawędzi bocznej  $CC'$  (rysunek obok). Oblicz stosunek objętości brył, na jakie płaszczyzna ta podzieliła ten gnaniastosłup.



**Rozwiązanie**

Wprowadźmy oznaczenia:

$a$  - krawędź podstawy gnaniastosłupa,  $h$  – wysokość gnaniastosłupa.

Zauważmy, że  $|CP| = a$ .

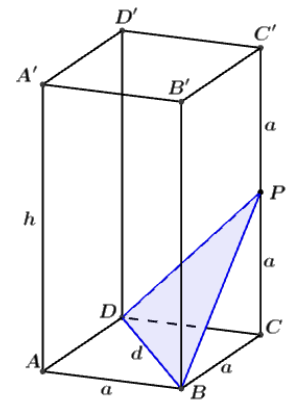
$$h = 2a,$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$V$  - objętość gnaniastosłupa,

$V_1$  - objętość ostrosłupa  $DBCP$ ,

$V_2$  - objętość bryły, która powstała po odcięciu ostrosłupa  $DBCP$  od gnaniastosłupa  $ABCD A' B' C' D'$ .



$$V = a^2 h, \text{ więc}$$

$$V = 2a^3$$

Zapiszmy objętości  $V_1$ :

Podstawą ostrosłupa  $BCDP$  jest trójkąt  $BCD$ , więc  $P_{BCD} = \frac{1}{2}a^2$ , wysokością ostrosłupa jest odcinek  $CP$  o długości  $a$ , zatem

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a,$$

$$V_1 = \frac{1}{6} a^3,$$

Zapiszmy objętość  $V_2$ :

$$V_2 = V - V_1$$

$$V_2 = 2a^3 - \frac{1}{6} a^3$$

$$V_2 = \frac{11}{6} a^3,$$

Obliczmy stosunek objętości brył:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{11}{6} a^3}{\frac{1}{6} a^3}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 11$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje.....1p.**

gdy

- zapisze, że  $V_1 = \frac{1}{6}a^3$  i  $V = 2a^3$ ,

albo

- zapisze, że  $V_1 = \frac{1}{12}a^2h$  i  $V = a^2h$ ,

albo

- zapisze, że  $V_1 = \frac{1}{12}V$ .

**Zdający otrzymuje.....2p.**

gdy obliczy stosunek objętości  $\frac{V_2}{V_1} = 11$  lub  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{11}$ .

**Zadanie 32. (0-4)**

Liczby:  $10x + 2$ ,  $80$ ,  $2x + 58$ , w podanej kolejności, są odpowiednio dziesiątym, jedenastym i czternastym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ . Wyznacz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

**Rozwiązanie**

Niech  $(a_n)$  będzie nieskończonym ciągiem arytmetycznym o różnicy  $r$ , w którym  $a_{10} = 10x + 2$ ,  $a_{11} = 80$ ,  $a_{14} = 2x + 58$

Z treści zadania i definicji ciągu arytmetycznego wynika, że

$$\begin{cases} r = a_{11} - a_{10} \\ 3r = a_{14} - a_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 80 - (10x + 2) \\ 3r = 2x + 58 - 80 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 8 \\ r = -2 \end{cases}$$

Wiedząc, że  $a_{11} = 80$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_1 + (11-1) \cdot r &= 80 \\ a_1 + 10 \cdot (-2) &= 80 \\ \underline{a_1} &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 100 + (n-1) \cdot (-2) \\ a_n &= 100 - 2n + 2 \\ \underline{a_n} &= -2n + 102 \end{aligned}$$

Wyznaczymy wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)$ , które są dodatnie.

$$-2n + 102 > 0$$

$$-2n > -102$$

$$n < 51$$

Są to więc wyrazy  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$ . Suma wszystkich tych wyrazów jest więc równa

$$S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50$$

$$S_{50} = \frac{100 + (-2 \cdot 50 + 102)}{2} \cdot 50 = 2550$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1p.**

Zdający

- zapisze układ, np.:  $\begin{cases} r = 80 - (10x + 2) \\ 3r = 2x + 58 - 80 \end{cases}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze równanie pozwalające wyznaczyć  $x$ , np.:  $80 - (10x + 2) = \frac{2x + 58 - 80}{3}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2p.**

Zdający wyznaczy  $r = -2$  oraz  $x = 8$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3p.**

Zdający

- obliczy wyraz  $a_1 = 100$  i zapisze warunek pozwalający wyznaczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ , np.:  $-2n + 102 > 0$ ,

albo

- rozwiąże zadanie do końca, ale z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne.....4p.**

Zdający wyznaczy sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ :  $S_{50} = 2550$

### Zadanie 33. (0-4)

Trójkąt  $\triangle ABC$  jest prostokątny, gdzie  $|\angle ABC| = 90^\circ$ . Punkt  $A = (-2, -1)$ ,  $B = (3, 4)$ , a punkt  $C$  leży na prostej  $k$  o równaniu  $y = 2x - 8$ . Wyznacz współrzędne punktu  $C$  oraz pole tego trójkąta.

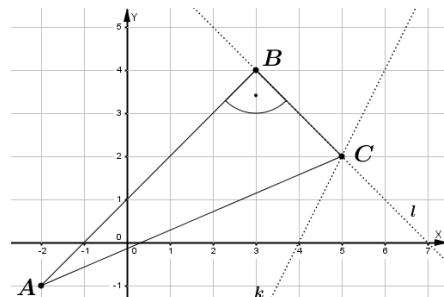
#### Rozwiązanie (I sposób)

Wyznaczymy współczynnik kierunkowy  $a_1$  prostej  $AB$ .

$$a_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a_1 = \frac{4 - (-1)}{3 - (-2)}$$

$$a_1 = 1$$



Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, więc prosta  $BC$  (oznaczona na rysunku literą  $l$ ) jest prostopadła do prostej  $AB$ . Oznaczmy przez  $a_2$  współczynnik kierunkowy prostej  $l$ , zatem

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 &= -1 \\ a_2 &= -1 \end{aligned}$$

Wyznamy równanie prostej  $l$ .

$$\begin{aligned} l: y &= -x + b \\ 4 &= -3 + b \\ b &= 7 \\ l: y &= -x + 7 \end{aligned}$$

Wyznamy współrzędne punktu  $C$ , który jest punktem wspólnym prostej  $l$  i  $k$ .

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\underline{C = (5, 2)}$$

Obliczmy długości odcinków  $AB$  oraz  $BC$ .

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-1))^2} \\ |AB| &= \sqrt{5^2 + 5^2} \\ |AB| &= 5\sqrt{2} \\ |BC| &= \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - 4)^2} \\ |BC| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\ |BC| &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

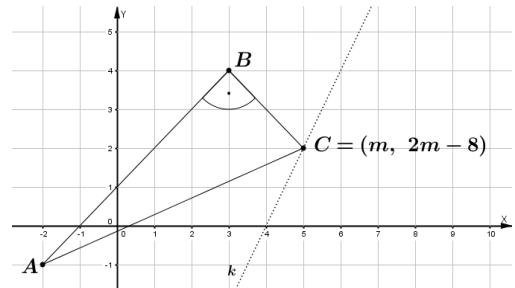
Obliczmy pole trójkąta  $\Delta ABC$ .

$$\begin{aligned} P_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \\ P_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ \underline{P_{\Delta ABC} = 10} \end{aligned}$$

### Rozwiązanie (II sposób)

Punkt  $C$  leży na prostej  $k$  o równaniu  $y = 2x - 8$ , więc istnieje taka liczba  $m \in \mathbb{R}$ , że  $C = (m, 2m - 8)$ . Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, więc

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$



$$\left(\sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-1))^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(m - 3)^2 + (2m - 8 - 4)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(m + 2)^2 + (2m - 8 + 1)^2}\right)^2$$

$$50 + m^2 - 6m + 9 + 4m^2 - 48m + 144 = m^2 + 4m + 4 + 4m^2 - 28m + 49$$

$$m = 5$$

$$C = (5, 2)$$

Obliczmy długości odcinków  $AB$  oraz  $BC$ .

$$|AB| = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-1))^2}$$

$$|AB| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$

$$|AB| = 5\sqrt{2}$$

$$|BC| = \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - 4)^2}$$

$$|BC| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$$

$$|BC| = 2\sqrt{2}$$

Obliczmy pole trójkąta  $\Delta ABC$ .

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC|$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\underline{P_{\Delta ABC} = 10}$$

#### Schemat oceniania (I sposób)

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania** .....1p.

Zdający wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$  ( $a_1 = -1$ ).

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....2p.

- Zdający wyznaczy równanie prostej  $l: y = -x + 7$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3p.

- Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $C = (5, 2)$ .

**Rozwiązanie pełne**.....4p.

Zdający wyznaczy pole trójkąta  $ABC$  ( $P_{\Delta ABC} = 10$ ).

#### Schemat oceniania (II sposób)

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania** .....1p.

Zdający zapisze, że punkt  $C$  leżący na prostej  $y = 2x - 8$  ma współrzędne np.:  $(m, 2m - 8)$ , gdzie  $m \in R$  oraz  $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....2p.

Zdający zapisze równanie

$$\left(\sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-1))^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(m - 3)^2 + (2m - 8 - 4)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(m + 2)^2 + (2m - 8 + 1)^2}\right)^2.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3p.

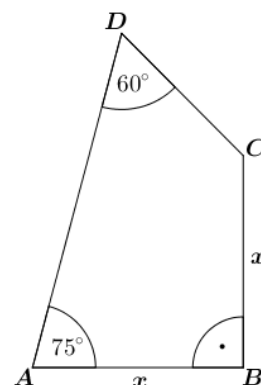
Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $C = (5, 2)$ .

**Rozwiązanie pełne**.....4p.

Zdający wyznaczy pole trójkąta  $ABC$  ( $P_{\Delta ABC} = 10$ ).

**Zadanie 34. (0-5)**

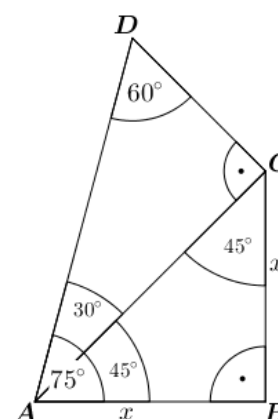
Pole czworokąta  $ABCD$  przedstawionego na rysunku wynosi  $18+12\sqrt{3}$ .  
Wyznacz obwód tego czworokąta, jeśli  $|AB|=|BC|=x$ ,  $|\angle BAD|=75^\circ$   
i  $|\angle ADC|=60^\circ$ .



**Rozwiązanie**

Zauważmy, że odcinek  $AC$  dzieli czworokąt  $ABCD$  na dwa trójkąty prostokątne:

- trójkąt  $\triangle ABC$ , w którym  $|\angle ABC|=90^\circ$ ,  $|\angle BAC|=45^\circ$   
i  $|\angle BCA|=45^\circ$ ,
- trójkąt  $\triangle ADC$ , w którym  $|\angle ACD|=90^\circ$ ,  $|\angle DAC|=30^\circ$   
i  $|\angle ADC|=60^\circ$ .



Wyznamy długość odcinka  $AC$  w zależności od  $x$ :

$$\sin 45^\circ = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{|AC|}, \text{ więc } |AC| = x\sqrt{2}$$

Wyznamy długość odcinka  $DC$  w zależności od  $x$ :

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|DC|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|DC|}{x\sqrt{2}}, \text{ więc } |DC| = \frac{x\sqrt{6}}{3}$$

Wyznamy pole trójkąta  $ABC$  w zależności od  $x$ :

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} x^2$$

Wyznamy pole trójkąta  $ACD$  w zależności od  $x$ :

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD|$$

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{3}$$

$$P_{ACD} = \frac{\sqrt{3}}{3} x^2$$

Wyznaczymy pole czworokąta  $ABCD$  w zależności od  $x$ :

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD}$$

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x^2$$

$$P_{ABCD} = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)x^2$$

Wyznaczymy wartość  $x$ :

$$\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)x^2 = 18 + 12\sqrt{3}$$

$$(3+2\sqrt{3})x^2 = 6(18+12\sqrt{3})$$

$$(3+2\sqrt{3})x^2 = 36(3+2\sqrt{3})$$

$$x^2 = 36, \text{ więc } x = 6.$$

Wyznaczymy wszystkie długości boków czworokąta  $ABCD$ .

$$|AB| = |BC| = 6,$$

$$|DC| = 2\sqrt{6}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{|DC|}{|AD|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{|AD|}$$

$$|AD| = 4\sqrt{6}$$

Wyznaczymy obwód czworokąta  $ABCD$ .

$$Obw_{ABCD} = 6 + 6 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{6}$$

$$Obw_{ABCD} = 12 + 6\sqrt{6} = 6(2 + \sqrt{6})$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1p.**

Zdający

- podzieli czworokąt na dwa trójkąty prostokątne i zapisze miary kątów w tych trójkątach, albo

- zapisze pole trójkąta  $ABC$  w zależności od  $x$ :  $P_{ABC} = \frac{1}{2}x^2$ ,

albo

- zapisze długość odcinka  $AC$  w zależności od  $x$ :  $|AC| = x\sqrt{2}$ .



**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2p.**

Zdający

- zapisze długość odcinka:  $|AC| = x\sqrt{2}$  oraz zapisze pole trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = \frac{1}{2}x^2$ ,

albo

- zapisze długości odcinków  $AC$  i  $DC$ :

$$|AC| = x\sqrt{2}, |DC| = \frac{x\sqrt{6}}{3}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3p.**

Zdający

- zapisze równanie pozwalające obliczyć wartość  $x$ , np.:  $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)x^2 = 18+12\sqrt{3}$

albo

- zapisze pola trójkątów w zależności od  $x$ :  $P_{ACD} = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2$  i  $P_{ABC} = \frac{1}{2}x^2$  oraz zapisze długość

$$\text{odcinka } |AD| = \frac{2\sqrt{6}}{3}x.$$

**Rozwiązanie prawie pełne.....4p.**

Zdający wyznaczy wartość  $x = 6$  oraz zapisze, że  $|AD| = \frac{2\sqrt{6}}{3}x$ .

**Rozwiązanie pełne.....5p.**

Zdający obliczy obwód czworokąta:  $Obw_{ABCD} = 12 + 6\sqrt{6}$ .

**Uwaga.**

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu długości  $x$  i konsekwentnie do wyznaczonej błędnej wartości doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje za całe rozwiązanie **4p**.
2. Jeżeli zdający nie oblicza wartości liczbowej  $x$  i zapisze, że obwód czworokąta wynosi  $Obw_{ABCD} = 2x + x\sqrt{6}$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **3p**.