ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Numer zadania	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**8**	**10**	**11**	**13**	**14**	**16**	**17**	**18**
Odpowiedź	**A**	**C**	**D**	**D F**	**A**	**C**	**FP**	**A**	**C**	**FF**	**B1**	**FP**	**C**	**A F**

Numer zadania	**19**	**20**	**21.1**	**21.2**	**22**	**23**	**25.1**	**25.2**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Odpowiedź	A	B	B	C	B	C	B	A	B	D	D	C	FP

PROPOZYCJE ROZWIĄZAŃ I PUNKTACJA DO ZADAŃ OTWARTYCH

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w propozycji należy przyznać zdającemu maksymalną liczbę punktów.
Za częściowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona w poniższej propozycji należy przyznać zdającemu liczbę punktów adekwatną do wykonanych czynności.

Zadanie 4. (0 – 2)

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: D albo F

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: D i F.

Zadanie 6. (0 – 2)

Przykładowe rozwiązanie:

$$\mathbf{5^{n+2021}+5^{n+2022}+5^{n+2023}+5^{n+2024}=5^{n+2020}(5^1+5^2)+5^{n+2022}(5^1+5^2)=}$$

$$\mathbf{5^{n+2020}\cdot 30+5^{n+2022}\cdot 30=30\cdot(5^{n+2020}+5^{n+2022})}$$

Dla każdej liczby naturalnej n liczba $\mathbf{5^{n+2020}+5^{n+2022}}$ jest liczbą naturalną, stąd liczba $\mathbf{30\cdot(5^{n+2020}+5^{n+2022})}$ jest podzielna przez 30. To należało wykazać.

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

1 pkt – zapisanie danej liczby w postaci $5^{n+2020}(5^1+5^2)+5^{n+2022}(5^1+5^2)$

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

Zadanie 9.1. (0 – 1)

Rozwiązanie: $\mathbf{x\in[-3,0)\cup(3,4)}$ (odczytujemy dla jakich argumentów wykres funkcji jest pod osią Ox).

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

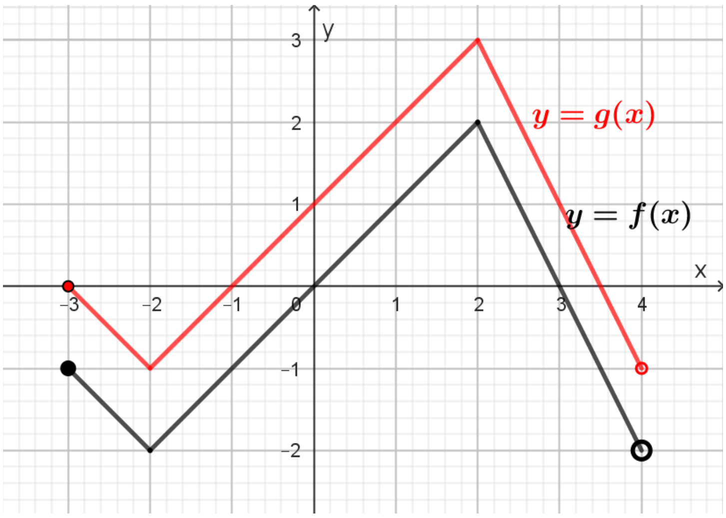
Zadanie 9.2. (0 – 1)
Rozwiązanie: $[-2, 2]$

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

Zadanie 9.3. (0 – 1)
Przykładowe rozwiązanie:



Odpowiedź: $[-1, 3]$.

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

Zadanie 12.1. (0 – 2)
Przykładowe rozwiązanie:

Zapisujemy wzór funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = a(x-3)(x+5)$.
Punkt A = (1, – 48) należy do wykresu funkcji *f*, zatem $f(1) = a(1-3)(1+5) = -48$.
Rozwiązujemy równanie $a(-2) \cdot 6 = -48$ i otrzymujemy $a = 4$.

Odpowiedź: $\boldsymbol{f(x) = 4(x-3)(x+5)}$.

Proponowana punktacja:

0 pkt **–** rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = a(x-3)(x+5)$ lub ogólnej $f(x) = 4x^2 + 8x - 60$ lub kanonicznej $f(x) = 4(x+1)^2 - 64$

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia postaci iloczynowej oraz zapisanie wzoru $f(x) = 4(x-3)(x+5)$.

Zadanie 12.2. (0 – 1)

Przykładowe rozwiązanie:

Obliczamy $p = \frac{3+(-5)}{2} = -1$ i podajemy równanie osi symetrii wykresu funkcji f**:** $\boldsymbol{x = -1.}$

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

Zadanie 15.1. (0 – 2)

Przykładowe rozwiązanie:

Wykorzystujemy wzór na n – ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r = -10 \\ a_1 + 5r = 2 \end{cases}.$$

Stąd $4r = 12$, zatem $r = 3$ i $a_1 = -13$.

Podajemy wzór ogólny: $\boldsymbol{a_n = -13 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 16.}$

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania

1 pkt – zapisanie układu równań i obliczenie a_1 albo r

2 pkt – poprawne obliczenie a_1 oraz r i zapisanie wzoru ogólnego.

Zadanie 15.2. (0 – 1)

Przykładowe rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie $3n - 16 = 134$, stąd $\boldsymbol{n = 50.}$

Liczba 134 jest **pięćdziesiątym (50)** wyrazem ciągu.

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne lub niepełne albo brak rozwiązania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

Zadanie 18. (0 – 2)

Proponowana punktacja:

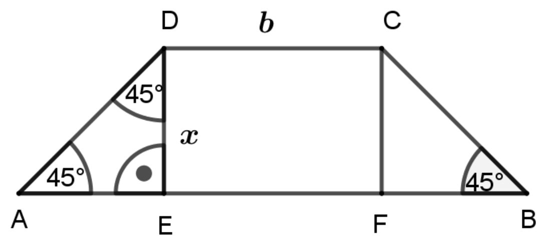
0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: A albo F

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: A i F.

Zadanie 24. (0 – 4)

Przykładowe rozwiązanie:



Trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, stąd |AE| = |DE| = x.

Trapez jest równoramienny, zatem |FB| = |AE| = x.

Niech |CD| = b

|AB| = |AE| + |EF| + |FB| = x + b + x = 2x + b, zatem z treści zadania mamy 2x + b + x = 48.

Wyznaczamy b = 48 – 3x, x > 0 i b > 0, stąd 48 – 3x > 0 czyli x < 16, zatem x ∈ $(0,16)$.

Pole trapezu P = $\frac{1}{2}$ (|AB| + |CD|) · x = $\frac{1}{2}$ (2x + b + b) · x = $\frac{1}{2}$ (2x + 96 – 6x) · x = $\frac{1}{2}$ (96 – 4x) · x = – $2x^2$ + 48x.

Zatem **P(x) = – $2x^2$ + 48x, gdzie x ∈ $(\mathbf{0}, \mathbf{16})$.**

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu (a = – 2 < 0).

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli p = $-\frac{48}{2\cdot(-2)} = 12 \in (0,16)$.

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 12.

Obliczamy b = 12, |AD| = x$\sqrt{2}$ = 12$\sqrt{2}$, |AB|= 24 + 12 = 36.

Największe pole ma trapez o obwodzie **48 + $\mathbf{24\sqrt{2}}$.**

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania

1 pkt – zapisanie związku między podstawami trapezu i wysokością 3x + b = 48

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole trapezu w zależności od długości jego wysokości x

3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole trapezu w zależności od długości jego wysokości x oraz podanie dziedziny funkcji x ∈ $(0,16)$ i prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: x = 12

4 pkt – poprawna metoda obliczenia argumentu x, dla którego trapez ma największe pole oraz poprawne obliczenie jego obwodu 48 + $24\sqrt{2}$.

Zadanie 31. (0 – 2)

Przykładowe rozwiązanie:

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary (x, y) (współrzędne punktu P), gdzie x, y ∈ {– 3, – 2, – 1, 0, 1, 2} i x $\neq$ y.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa |Ω| = 6 · 5 = 30.

Zdarzeniu B sprzyjają następujące zdarzenia elementarne $(-3,-1),(-2,0),(-1,1),(0,2)$, więc |B| = 4.

Prawdopodobieństwo zdarzenia B jest równe P(B) = $\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$.

Proponowana punktacja:

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania
1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub podanie ich liczby $|\Omega|$ = 6 · 5
albo
wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B lub podanie ich liczby
albo
zapisanie tylko, że P(B) = $\frac{4}{30}$
2 pkt – rozwiązanie pełne.