

ZESTAW WYBRANYCH WZORÓW MATEMATYCZNYCH OBOWIĄZUJĄCYCH OD ROKU 2010

(źródło: CKE)

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad | -x | = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad |x - y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ mamy warunki równoważne:

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \qquad |x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r$$

2. POTĘGI I PIERWASTKI

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

$$\text{– dla } a \neq 0: \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{oraz} \quad a^0 = 1$$

$$\text{– dla } a \geq 0: \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\text{– dla } a > 0: \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. LOGARYTMY

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę c :

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c \qquad \text{Równoważnie: } a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0, y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$\text{Jeżeli } a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1 \text{ oraz } c > 0, \text{ to } \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi związek: $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb a, b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^2 - 1 = (a-1)(a+1) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1) \qquad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \dots + a^{n-1})$$

7. CIĄGI

■ Ciąg arytmetyczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

■ Ciąg geometryczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

■ Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

8. FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p, q) . Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$), zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

– jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),

– jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

– jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

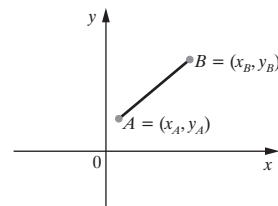
9. GEOMETRIA ANALITYCZNA

■ **Odcinek**

Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$



■ **Wektory**

Współrzędne wektora \vec{AB} :

$$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2], \vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

■ **Prosta**

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi OX ; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi OY ; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi OY , to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej: $a = \operatorname{tg} \alpha$

Współczynnik b wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina.

Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

■ **Prosta i punkt**

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest dana wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

■ **Para prostych**

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1, y = a_2x + b_2$ spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$

– są prostopadłe, gdy $a_1 a_2 = -1$

– tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$

– są równoległe, gdy $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$

– są prostopadłe, gdy $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

– tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|$

■ **Trójkąt**

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC , czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne: $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$

■ **Przekształcenia geometryczne**

– przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$

– symetria względem osi OX przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$

– symetria względem osi OY przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$

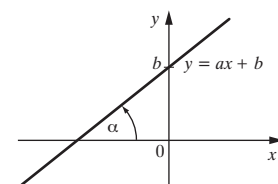
– symetria względem punktu (a, b) przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (2a - x, 2b - y)$

– jednokładność o środku w punkcie $(0, 0)$ i skali $s \neq 0$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx, sy)$

■ **Równanie okręgu**

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ lub } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ gdy } r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$$



10. PLANIMETRIA

■ **Cechy przystawiania trójkątów**

To, że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawiania trójkątów**:

– **cecha przystawiania „bok – bok – bok”:**

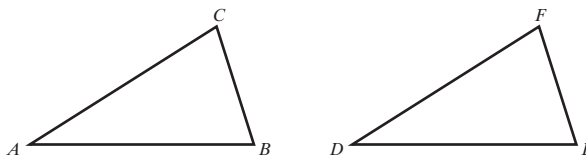
odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości: $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$.

– **cecha przystawiania „bok – kąt – bok”:**

dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

– **cecha przystawiania „kąt – bok – kąt”:**

jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np. $|AB| = |DE|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$



■ **Cechy podobieństwa trójkątów**

To, że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

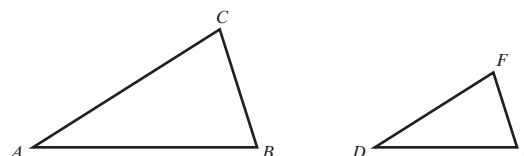
– **cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:**

długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, np.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

– **cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:**

długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$



– **cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:**

dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające): $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$

Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie ABC :

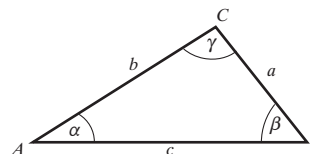
a, b, c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach A, B, C

h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C

R, r – promienie okręgów opisanego i wpisanego



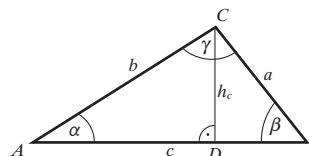
■ **Twierdzenie Pitagorasa** (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie ABC kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

■ **Związki miarowe w trójkącie prostokątnym**

Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$\begin{aligned} h_c^2 &= |AD| \cdot |DB| & h_c &= \frac{ab}{c} & a &= c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta \\ a &= b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} & R &= \frac{1}{2} c & r &= \frac{a+b-c}{2} = p-c \end{aligned}$$



■ **Twierdzenie sinusów**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

■ **Twierdzenie cosinusów**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

■ **Trójkąt równoboczny**

a – długość boku, h – wysokość trójkąta

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

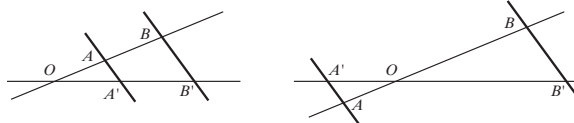
■ **Wzory na pole trójkąta**

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \qquad P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \qquad P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

■ **Twierdzenie Talesa**

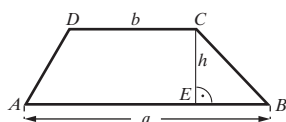
Jeżeli proste równoległe AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O , to $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$



■ **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa**

Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$, to proste AA' i BB' są równoległe.

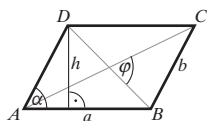
■ **Czworokąty**



Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych. Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

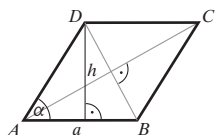


Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \varphi$$

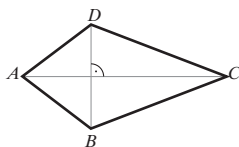


Romb

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

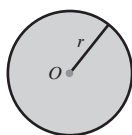
$$P = ah = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid

Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych. Wzór na pole deltoidu:

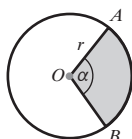
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Koło

Wzór na pole koła o promieniu r : $P = \pi r^2$

Obwód koła o promieniu r : $Ob = 2\pi r$



Wycinek koła

Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

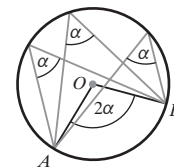
Długość łuku wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

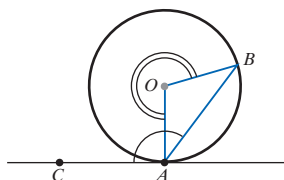
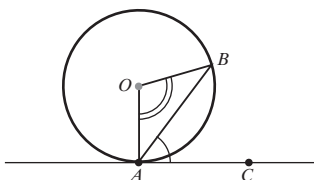
■ **Kąty w okręgu**

Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.



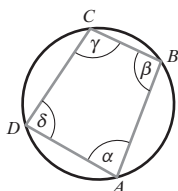
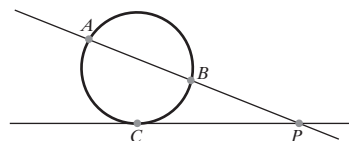
■ **Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą**



Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB . Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A . Wtedy $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .

■ **Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej**

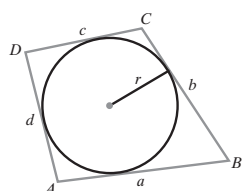
Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to $|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$



■ **Okrąg opisany na czworokącie**

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180° :

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



■ **Okrąg wpisany w czworokąt**

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

11. STEREOMETRIA

■ Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P . Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P . Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .

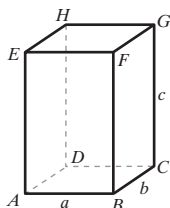
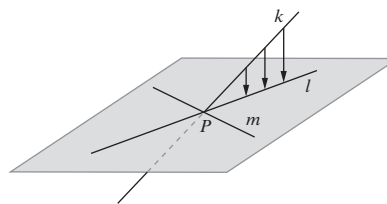
Oznaczenia

P – pole powierzchni całkowitej

P_b – pole powierzchni bocznej

P_p – pole powierzchni podstawy

V – objętość

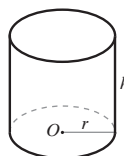


■ Prostopadłościan

$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu



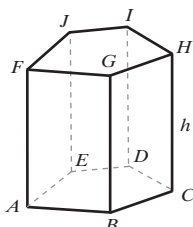
■ Walec

$$P_b = 2\pi rh$$

$$P = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością walca

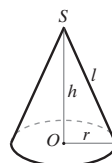


■ Graniastosłup prosty

$$P_b = 2p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa



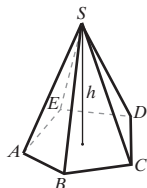
■ Stożek

$$P_b = \pi rl$$

$$P = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

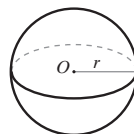
gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością, l długością tworzącej stożka



■ Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa



■ Kula

$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

12. TRYGNOMETRIA

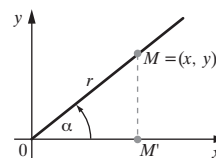
■ Definicje funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

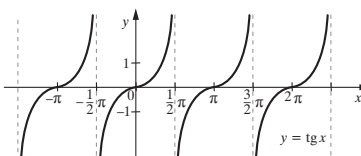
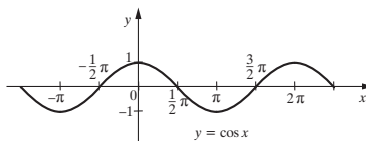
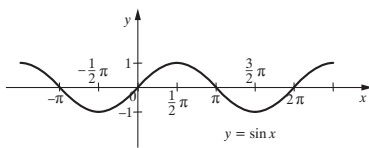
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M



■ Wykresy funkcji trygonometrycznych



■ Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k - \text{całkowite}$$

■ Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

■ **Funkcje sumy i różnicy kątów**

Dla dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Ponadto mamy równości:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} & \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

■ **Funkcje podwojonego kąta**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

13. KOMBINATORYKA

■ **Wariacje z powtórzeniami**

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k .

■ **Wariacje bez powtórzeń**

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k ($1 \leq k \leq n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

■ **Permutacje**

Liczba sposobów, na które $n \geq 1$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

■ **Kombinacje**

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k ($0 \leq k \leq n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

■ **Własności prawdopodobieństwa**

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\Omega) = 1$ Ω – zdarzenie pewne

$P(\emptyset) = 0$ \emptyset – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A) \leq P(B)$, gdy $A \subset B \subset \Omega$

$P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

■ **Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A , zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω .

15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

■ **Średnia arytmetyczna**

Średnia arytmetyczna n liczb a_1, a_2, \dots, a_n jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

■ **Średnia ważona**

Średnia ważona n liczb a_1, a_2, \dots, a_n , którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi w_1, w_2, \dots, w_n jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

■ **Średnia geometryczna**

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb a_1, a_2, \dots, a_n jest równa: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

■ **Mediana**

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1} \right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

■ **Wariancja i odchylenie standardowe**

Wariancją n danych liczbowych a_1, a_2, \dots, a_n o średniej arytmetycznej \bar{a} jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

16. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$	$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90	46	0,7193	1,0355	44
1	0,0175	0,0175	89	47	0,7314	1,0724	43
2	0,0349	0,0349	88	48	0,7431	1,1106	42
3	0,0523	0,0524	87	49	0,7547	1,1504	41
4	0,0698	0,0699	86	50	0,7660	1,1918	40
5	0,0872	0,0875	85	51	0,7771	1,2349	39
6	0,1045	0,1051	84	52	0,7880	1,2799	38
7	0,1219	0,1228	83	53	0,7986	1,3270	37
8	0,1392	0,1405	82	54	0,8090	1,3764	36
9	0,1564	0,1584	81	55	0,8192	1,4281	35
10	0,1736	0,1763	80	56	0,8290	1,4826	34
11	0,1908	0,1944	79	57	0,8387	1,5399	33
12	0,2079	0,2126	78	58	0,8480	1,6003	32
13	0,2250	0,2309	77	59	0,8572	1,6643	31
14	0,2419	0,2493	76	60	0,8660	1,7321	30
15	0,2588	0,2679	75	61	0,8746	1,8040	29
16	0,2756	0,2867	74	62	0,8829	1,8807	28
17	0,2924	0,3057	73	63	0,8910	1,9626	27
18	0,3090	0,3249	72	64	0,8988	2,0503	26
19	0,3256	0,3443	71	65	0,9063	2,1445	25
20	0,3420	0,3640	70	66	0,9135	2,2460	24
21	0,3584	0,3839	69	67	0,9205	2,3559	23
22	0,3746	0,4040	68	68	0,9272	2,4751	22
23	0,3907	0,4245	67	69	0,9336	2,6051	21
24	0,4067	0,4452	66	70	0,9397	2,7475	20
25	0,4226	0,4663	65	71	0,9455	2,9042	19
26	0,4384	0,4877	64	72	0,9511	3,0777	18
27	0,4540	0,5095	63	73	0,9563	3,2709	17
28	0,4695	0,5317	62	74	0,9613	3,4874	16
29	0,4848	0,5543	61	75	0,9659	3,7321	15
30	0,5000	0,5774	60	76	0,9703	4,0108	14
31	0,5150	0,6009	59	77	0,9744	4,3315	13
32	0,5299	0,6249	58	78	0,9781	4,7046	12
33	0,5446	0,6494	57	79	0,9816	5,1446	11
34	0,5592	0,6745	56	80	0,9848	5,6713	10
35	0,5736	0,7002	55	81	0,9877	6,3138	9
36	0,5878	0,7265	54	82	0,9903	7,1154	8
37	0,6018	0,7536	53	83	0,9925	8,1443	7
38	0,6157	0,7813	52	84	0,9945	9,5144	6
39	0,6293	0,8098	51	85	0,9962	11,4301	5
40	0,6428	0,8391	50	86	0,9976	14,3007	4
41	0,6561	0,8693	49	87	0,9986	19,0811	3
42	0,6691	0,9004	48	88	0,9994	28,6363	2
43	0,6820	0,9325	47	89	0,9998	57,2900	1
44	0,6947	0,9657	46	90	1,0000	—	0
45	0,7071	1,0000	45				