Szanowny Maturzysto,

nie zdałeś naszej próbnej matury z matematyki?

To prawie niemożliwe, ale jeżeli jednak tak, to…

Pewnie sądzisz, że przyczyna tkwi w bardzo trudnym arkuszu!

Zobaczmy, jak to wygląda w rzeczywistości.

Każdy arkusz maturalny powinien zawierać zestaw takich zadań, które są podstawą matematycznego elementarza, zatem umiejętność ich rozwiązania jest absolutnie niezbędna do zdania matury .

Wybierzemy z naszego arkusza (wskażemy) takie właśnie zadania.

Prosimy, poświęć trochę czasu i przeanalizuj (najlepiej kilka razy) cały materiał zamieszczony poniżej.

Zadanie 1 (0-1)

Dane są liczby $x = \log_3 \frac{1}{9}$ i $y = \log_2 9 - \log_2 18$. Wówczas

A. $x - y = -1$ **B.** $x - y = 3$ **C.** $x - y = 1$ **D.** $x - y = -3$

Do obliczenia liczby x potrzebowałeś definicji logarytmu – „Karta wzorów" str. 2

Logarytmem $\log_a c$ dodatniej liczby c przy dodatniej i różnej od 1 podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać c:

$$\log_a c = b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^b = c$$

Do obliczenia liczby y potrzebowałeś wzoru – „Karta wzorów" str. 2

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Stosując te wzory otrzymujemy:

$x = log_3 \frac{1}{9} = -2$ bo $3^{-2} = \frac{1}{9}$,

$y = log_2 9 - log_2 18 = log_2 \frac{9}{18} = log_2 \frac{1}{2} = -1$ bo $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Zatem

x – y = $-2-(-1)=-1$

<u>Poprawna odpowiedź to A.</u>

Czy zgodzisz się z nami Szanowny Maturzysto, że mając „Kartę wzorów" nie można było nie rozwiązać tego zadania?

Zadanie 4 (0-1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $3-\frac{2x-5}{2}\le x-1$ jest przedział

A. $\left\langle \frac{3}{4}, +\infty \right)$ **B.** $\left\langle 3\frac{1}{4}, +\infty \right)$ **C.** $\langle 4, +\infty)$ **D.** $(-\infty, 6\rangle$

Na dobry początek pomnożyłeś zapewne obie strony tej nierówności przez 2. Wtedy otrzymałeś:

$6-(2x-5)\le 2x-2$ lub inaczej $6-2x+5\le 2x-2$.

Podstawowy błąd, jaki tutaj można było zrobić, to zgubić nawias, lub- w zapisie bez nawiasu- nie zmienić znaku liczby -5 . Wtedy otrzymałbyś <u>niepoprawną</u> odpowiedź A.

Dalej otrzymujemy:

$-4x\le -13$ i dzieląc obustronnie przez (–4) oraz

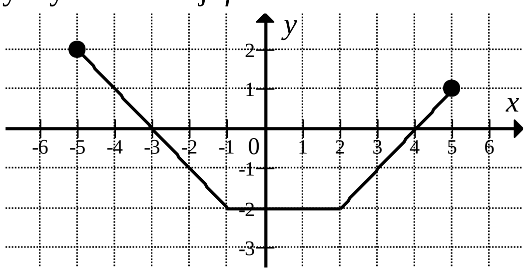
pamiętając o zmianie kierunku nierówności otrzymujemy $x\ge \frac{13}{4}$.

<u>Poprawna odpowiedź to B.</u>

Zapewne rozwiązałeś takich nierówności bardzo dużo i bardzo dobrze znasz ten algorytm, więc nie ma mowy o elementarnych błędach opisanych wyżej, zatem zdobywasz kolejny punkt.

Zadanie 6 (0-1)

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji *f*.



Wartość wyrażenia $f\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\sqrt{2}\right)$ jest liczbą z przedziału

A. $\langle -5,-2\rangle$ **B.** $\langle -2,0\rangle$ **C.** $\langle 0,2\rangle$ **D.** $\langle 2,5\rangle$

Wystarczy oszacować wartość wyrażenia $f\left(-\frac{3}{2}\right)$. W przybliżeniu otrzymujemy $\left(-\frac{3}{2}\right)$. Natomiast f$\left(\sqrt{2}\right)$ = -2. Zatem po pomnożeniu tych liczb **(„ minus razy minus = plus”)** otrzymujemy 3.

Prawidłowa odpowiedź to D.

Bardzo nieskomplikowane- tu niewątpliwie tu każdy zdobywa punkt.

Zadanie 8 (0-1)

Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x)=2^x-1$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Funkcja ta przyjmuje wartość 511 dla argumentu równego

A. -2 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 34

Wystarczy za x podstawić kolejne liczby i wystukać na kalkulatorze wartość funkcji f, aby otrzymać poprawną odpowiedź C.

Kalkulator zdobywa za nas kolejny punkt.

Zadanie 10 (0-1)

Punkty $A=(2,-1)$ i $B=(5,3)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego *ABC*. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy

A. 5 **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

Do obliczenia boku trójkąta potrzebowałeś wzoru na długość odcinka –„Karta wzorów" str.4

- Odcinek

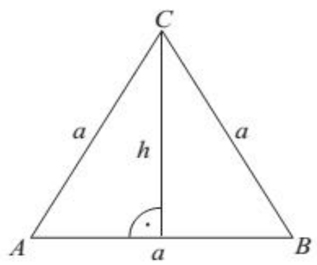
Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$ jest dana wzorem:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Obliczamy długość boku trójkąta $|AB| = \sqrt{(5-2)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

Do obliczenia promienia okręgu wpisanego potrzebowałeś wzoru – „Karta wzorów" str. 9

- Trójkąt równoboczny



a – długość boku
h – wysokość trójkąta

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad R=\frac{2}{3}h$$

$$P_\Delta=\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad r=\frac{1}{3}h$$

Obliczamy wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, a następnie promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

Poprawna odpowiedź to D.

Do zdobycia kolejnego punktu potrzebne były tylko poprawne rachunki!

Zadanie 11 (0-1)

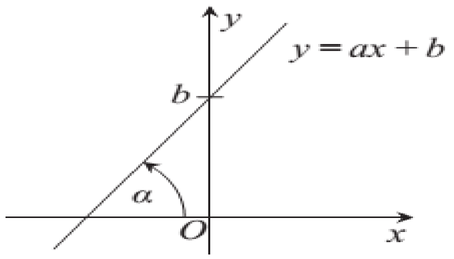
Prosta o równaniu $y=(2-m)x-1$ jest nachylona do osi *Ox* pod kątem 60°. Wówczas

A. $m=2-\sqrt{3}$ **B.** $m=-2-\sqrt{3}$ **C.** $m=-2+\sqrt{3}$ **D.** $m=2+\sqrt{3}$

Do wyznaczenia m potrzebowałeś wzoru z „Karty wzorów" - str. 5.

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Prosta o równaniu $y = (2-m)x - 1$ jest nachylona do osi *Ox* pod kątem $60°$. Zgodnie ze wzorem obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $a = tg60^0$.

Tangens 60^0 odczytujemy z „Karty wzorów" - str.15.

- Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Zatem mamy $a = tg60^0 = \sqrt{3}$

Współczynnik kierunkowy „a" prostej $y = (2-m)x - 1$ jest równy $a = 2 - m$.
Zatem mamy równanie

$2 - m = \sqrt{3}$, czyli $-\ \mathrm{m} = \sqrt{3} - 2$, a stąd $\mathrm{m} = 2 - \sqrt{3}$.

Poprawna odpowiedź to A.

Znowu bez wysiłku zdobyłeś kolejny punkt dzięki znajomości zawartości „ Karty wzorów"!

Zadanie 13 (0-1)

Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x + 3$ i przechodzącej przez punkt $A = (0, -3)$.

A. $y = \frac{1}{2}x - 3$ **B.** $y = -\frac{1}{2}x - 3$ **C.** $y = -2x - 3$ **D.** $y = 2x - 3$

Do sprawdzenia, która prosta jest równoległa <u>wystarczyło spojrzeć na wzór w" Karcie wzorów" str. 5.</u>

- <u>Para prostych</u>

Dwie proste o równaniach kierunkowych:

$$y = a_1 x + b_1 \qquad\qquad y = a_2 x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$

Współczynnik kierunkowy danej prostej jest równy 2 i **taki sam współczynnik kierunkowy ma <u>wyłącznie</u> prosta o równaniu y = 2x – 3.** Dalej nie ma co sprawdzać, bo tylko jedna odpowiedź jest dobra, więc musi być nią D.

<u>Prawidłowa odpowiedź to D.</u>

Bezwarunkowe zdobycie tego punktu nie wymaga komentarza!

Zadanie 14 (0-1)

Równanie $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 1$

A. nie ma rozwiązania.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste: $x = 0$.

C. ma dokładnie jedno rozwiązania rzeczywiste: $x = 2$.

D. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste: $x = 0$, $x = 2$.

Wystarczyło podstawiać do równania za x podane liczby:

x = 0 , wtedy otrzymujemy 1 = 1 czyli jest dobrze,

x = 2 , wtedy mamy zero w mianowniku, czyli nie jest dobrze , więc liczba 2 nie jest rozwiązaniem równania.

Zatem jedyne rozwiązanie to liczba 0, czyli **poprawna jest odpowiedź B.**

Bardzo, bardzo nieskomplikowane, mamy pewny kolejny punkt.

Zadanie 18 (0-1)

Obwód prostokąta jest równy 30. Stosunek długości jego boków jest równy $3:2$. Pole tego prostokąta jest równe

A. 6 **B.** 54 **C.** 150 **D.** 216

Aby rozwiązać to zadanie wystarczyło zapisać długości poszczególnych boków zgodnie z podaną proporcją: a = 3x, b= 2x , a następnie zapisać wzór na obwód prostokąta 2a + 2b = 30, czyli 6x + 4x = 30. Stąd otrzymujemy x = 3, zatem boki tego prostokąta to 9 i 6, czyli pole jest równe 54.

Prawidłowa odpowiedź to B

Zadanie" gimnazjalne" - doliczamy kolejny punkt.

-

Zadanie 21 (0-1)

Rozwiąż nierówność $3-x(x+1)\le x^2+4x$.

Rozwiązanie

Nierówność przekształcamy równoważnie

$$3-x^2-x\le x^2+4x,$$

$$2x^2+5x-3\ge 0.$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2+5x-3$, wykorzystując wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Wówczas

$$\Delta=5^2-4\cdot 2\cdot(-3)=49,\ \sqrt{\Delta}=7,$$

$$x_1=\frac{-5+7}{2\cdot 2}=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{-5-7}{2\cdot 2}=-3.$$

Możemy również obliczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2+5x-3$, rozkładając go na czynniki liniowe

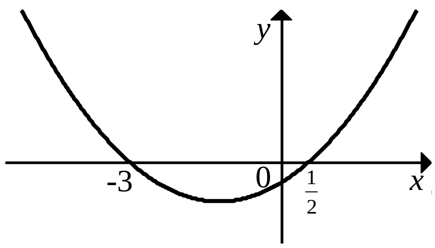
$$2x^2+5x-3=2x^2+6x-x-3=2x(x+3)-(x+3)=(2x-1)(x+3).$$

Stąd

$$2x-1=0 \text{ lub } x+3=0,$$

$$x=\frac{1}{2} \text{ lub } x=-3.$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y=2x^2+5x-3$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań rozwiązywanej nierówności

$$x\in(-\infty,-3\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right).$$

Odpowiedź: $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Do rozwiązania tego zadania potrzebowałeś wzorów- „Karta wzorów” str.4.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2+bx+c=0$), zależy od wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$:

- jeżeli $\Delta<0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta=0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
- jeżeli $\Delta>0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p,q). Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a>0$; do dołu, gdy $a<0$.

Zadanie to jest pewniakiem maturalnym. Znajdowało się dotychczas w prawie każdym arkuszu maturalnym, zatem trudno wyobrazić sobie sytuację , w której uczeń zamierzający zdać maturę, nie umie go rozwiązywać. Doliczamy więc 2 punkty.

Zadanie 22 (0-1)

Rozwiąż równanie $(-x^3-4x)(8x^3+1)=0$.

Rozwiązanie

Równanie $(-x^3-4x)(8x^3+1)=0$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$-x(x^2+4)(8x^3+1)=0.$$

Iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego czynników jest równy 0. Zatem równanie $(-x^3-4x)(8x^3+1)=0$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$-x=0 \text{ lub } x^2+4=0 \text{ lub } 8x^3+1=0,$$

$$x=0 \text{ lub } x^2+4=0 \text{ lub } x^3=-\frac{1}{8}.$$

Równanie $x^2+4=0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, a z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że rozwiązaniem równania $x^3=-\frac{1}{8}$ jest liczba $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$.

W rezultacie równanie $\left(-x^3-4x\right)\left(8x^3+1\right)=0$ ma dwa rozwiązania: $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$.

Do rozwiązania tego zadania potrzebowałeś definicji pierwiastka stopnia nieparzystego z liczby ujemnej -„Karta wzorów" str. 1

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geqslant 0$ nazywamy liczbę $b \geqslant 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

oraz wzorów dotyczących liczby rozwiązań równania kwadratowego w zależności od wyróżnika -„ Karta wzorów" str. 4

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$), zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

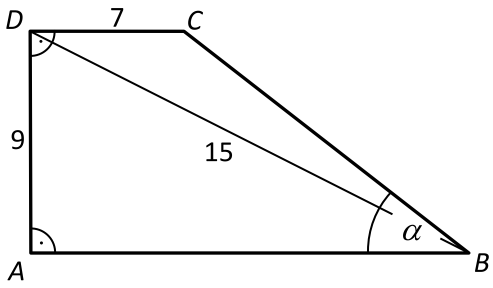
- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Od roku 2015 zadania tego typu weszły do kanonu podstawowych zadań maturalnych, dlatego zamieściliśmy je w arkuszu. Mamy nadzieję, że bardzo dużo takich zadań rozwiązano na **lekcji, zatem zdobywamy kolejne 2 punkty.**

Zadanie 24 (0-2)

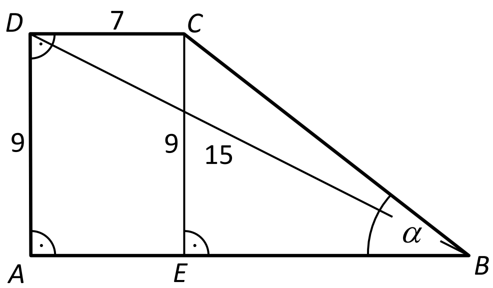
Ramię *AD* trapezu prostokątnego *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* jest prostopadłe do podstaw tego trapezu i ma długość równą $|AD|=9$. Przekątna *BD* ma długość $|BD|=15$, a podstawa *CD* ma długość $|CD|=7$ (zobacz rysunek).



Oblicz tangens kąta ostrego α tego trapezu.

Rozwiązanie

Poprowadźmy wysokość *CE* trapezu.



Wówczas czworokąt *AECD* jest prostokątem, więc

$$|AE| = |DC| = 7 \text{ oraz } |EC| = |AD| = 9.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABD* otrzymujemy

$$|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2,$$

$$|AB|^2 + 9^2 = 15^2,$$

$$|AB|^2 = 225 - 81,$$

$$|AB|^2 = 144. \text{ Stąd } |AB| = 12. \text{ Zatem } |EB| = 12 - 7 = 5.$$

Z trójkąta prostokątnego *BCE* otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|EC|}{|EB|} = \frac{9}{5}.$$

Odpowiedź: Tangens kąta ostrego α tego trapezu jest równy $\frac{9}{5}$.

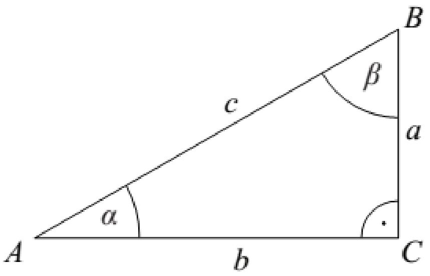
Do rozwiązania zadania wystarczy twierdzenie Pitagorasa – „Karta wzorów" str. 8

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie ABC kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

oraz definicja funkcji tangens – „Karta wzorów" str. 14

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

Wykonujemy rachunki na liczbach naturalnych i mamy kolejne 2 punkty.

Zadanie 27 (0-4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba jest nieparzysta lub suma wszystkich jej cyfr jest równa 5. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie liczby naturalne trzycyfrowe, czyli pary (x, y) różnych liczb naturalnych ze zbioru $\Omega = \{100, 101, 102, \ldots, 999\}$. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900,$$

a wszystkie zdarzenie jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Oznaczamy przez *A* zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest nieparzysta lub suma wszystkich jej cyfr jest równa 5.

Liczba wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych jest równa

$$9 \cdot 10 \cdot 5 = 450,$$

gdyż pierwszą cyfrą takiej liczby może być dowolna cyfra różna od 0, druga cyfra może być dowolna, a trzecia musi być jedną spośród cyfr: 1, 3, 5, 7, 9.

Wyznaczmy teraz te wszystkie liczby naturalne trzycyfrowe, których suma wszystkich cyfr jest równa 5. Taką sumę otrzymamy w jednym z następujących przypadków:

1) pierwszą cyfrą będzie 5, a dwie pozostałe to 0. Jest tylko jedna taka liczba: 500,

2) jedną z cyfr jest 4, jedną 1 i jedną 0. Są cztery takie liczby: 104, 140, 401, 410,

3) jedną cyfrą jest 3, jedną 2 i jedną 0. Tu, podobnie jak w poprzednim przypadku mamy cztery takie liczby: 203, 230, 302, 320,

4) jedną z cyfr jest 3, a dwie pozostałe to 1. Są trzy takie liczby: 113, 131, 311.

5) jedną z cyfr jest 1, a dwie pozostałe to 2. Są, podobnie jak w poprzednim przypadku, trzy takie liczby: 122, 212, 221.

W rezultacie mamy $1+4+4+3+3=15$ liczb naturalnych trzycyfrowych o sumie wszystkich cyfr równej 5. Spośród nich 6 to liczby nieparzyste: 401, 203, 113, 131, 311, 221. Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* jest równa

$$|A| = 450 + 15 - 6 = 459.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest więc równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{459}{900} = \frac{51}{100}.$$

Odpowiedź:

Uwaga

Liczbę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych możemy też obliczyć inaczej. Wystarczy zauważyć, że wśród liczb 1,2,3,4,…98,99,100,101,102,…,999, których jest 999, pierwsze 99 to liczby jedno lub dwucyfrowe. Zatem liczba wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych jest równa $999 - 99 = 900$.

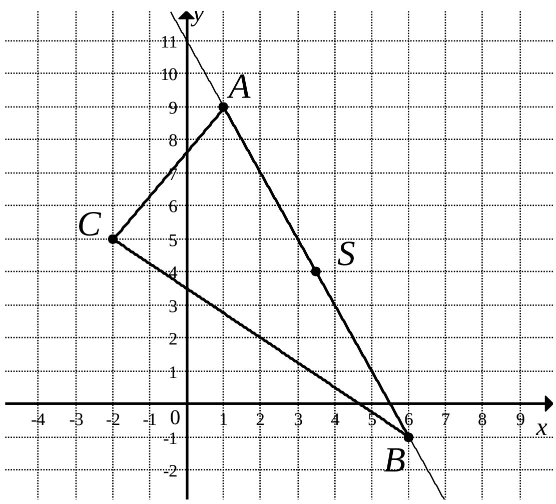
Liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych można także policzyć zliczając je setkami, a liczba wszystkich liczb trzycyfrowych nieparzystych to połowa liczby wszystkich liczb trzycyfrowych. Za taki rachunek (chyba dość nieskomplikowany !) mamy kolejne 2 punkty.

Zadanie 28 (0-4)

Punkty $A=(1,9)$ i $C=(-2,5)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego *ABC*, którego przeciwprostokątna AB zawiera się w prostej o równaniu $y=-2x+11$. Oblicz współrzędne środka tej przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie (I sposób)

Zauważmy najpierw, że punkt *A* leży na prostej o równaniu $y=-2x+11$, gdyż $-2\cdot 1+11=9$.



Obliczmy współczynnik kierunkowy prostej *AC*

$$a_{AC}=\frac{9-5}{1-(-2)}=\frac{4}{3}.$$

Boki *AC* i *BC* trójkąta *ABC* to przyprostokątne tego trójkąta, więc prosta *BC* jest prostopadła do prostej *AC*. Zatem współczynnik kierunkowy a_{BC} prostej *AB* jest równy

$$a_{BC}=-\frac{1}{a_{AC}}=-\frac{3}{4}.$$

Prosta *BC* przechodzi przez punkt $C=(-2,5)$, więc jej równanie ma postać

$$y=a_{BC}\left(x-x_C\right)+y_C,$$

$$y=-\tfrac{3}{4}(x+2)+5,$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}.$$

Wierzchołek *B* trójkąta *ABC* to punkt przecięcia prostych *AB* i *BC*. Współrzędne tego wierzchołka obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=-2x+11 \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2} \end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy

$$-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}=-2x+11,$$

$$\frac{5}{4}x=\frac{15}{2},$$

$$x=6,$$

więc $y=-2\cdot 6+11=-1$. Zatem $B=(6,-1)$.

Współrzędne środka *S* przeciwprostokątnej *AB* obliczymy ze wzorów na współrzędne środka odcinka

$$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{1+6}{2},\frac{9+(-1)}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},4\right).$$

Do zapisania równania prostej AC potrzebowałeś wzoru – „Karta wzorów" str. 5.

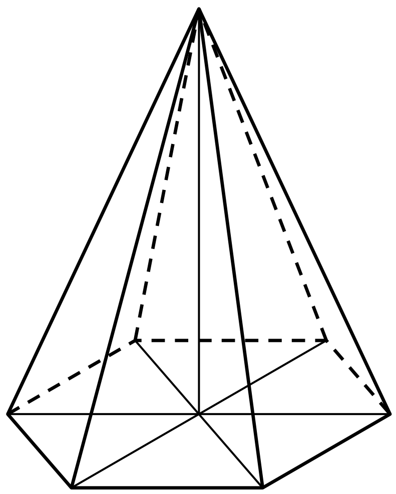
Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$:

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

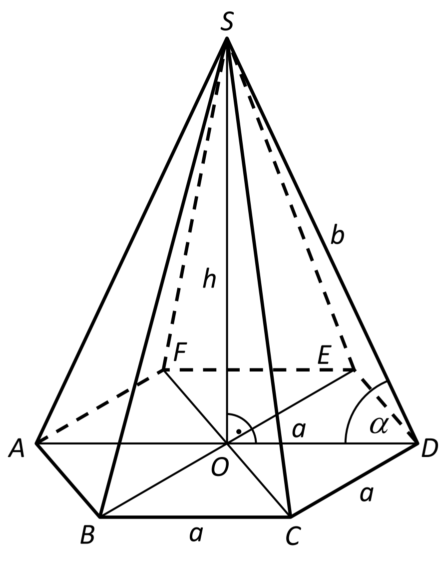
Za wyznaczenie równania tej prostej mamy kolejny punkt.

Zadanie 29 (0-5)

Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $48\sqrt{2}$. Kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Za samo poprawne zaznaczenie wskazanego kąta otrzymaliśmy 1 punkt.

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równa $6a+6b$, więc otrzymujemy równanie

$$6a+6b=48\sqrt{2},$$

(1) $$a+b=8\sqrt{2}.$$

Podstawą tego ostrosłupa jest sześciokąt foremny o boku długości *a*. Sześciokąt ten składa się z sześciu takich samych trójkątów równobocznych o boku długości *a*. W szczególności $|OD|=a$.

Kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy

$$\cos\alpha=\frac{|OD|}{|DS|}, \text{ czyli } \cos\alpha=\frac{a}{b}.$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{1}{3}=\frac{a}{b},$$

$$b=3a.$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$a+3a=8\sqrt{2},$$

$$4a=8\sqrt{2}$$

$$a=2\sqrt{2}.$$

Zatem $b=3a=6\sqrt{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ODS* otrzymujemy

$$|DS|^2=|OD|^2+|OS|^2,$$

$$b^2=a^2+h^2$$

$$\left(6\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+h^2,$$

$$72=8+h^2,$$

$$h^2=64,$$

Stąd $h=8$.

Pole podstawy ostrosłupa jest równe sumie sześciu pól trójkątów równobocznych o boku długości $a=2\sqrt{2}$, więc

$$P_p=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}=\frac{3}{2}\cdot 8\sqrt{3}=12\sqrt{3}.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V=\frac{1}{3}P_p\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{3}\cdot 8=32\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $V=32\sqrt{3}$.

Zadanie 30 (0-5)

Trzy początkowe wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego są równe odpowiednio: 1, $6x$, $4x^2+8$. Oblicz *x* oraz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, mniejszych od 150.

Dotychczas w każdym arkuszu maturalnym znajdowało się zadanie, w którym korzystano <u>ze wzoru na środkowy wyraz ciągu arytmetycznego lub geometrycznego, „Karta wzorów" str. 3.</u>

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n\geqslant 2$$

Za zastosowanie tego wzoru i wyznaczenie x można było otrzymać 2 punkty.

Rozwiązanie (I sposób)

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem arytmetycznym o różnicy *r*, w którym $a_1=1$, $a_2=6x$ oraz $a_3=4x^2+8$.

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$6x=\frac{1+4x^2+8}{2},$$

$$12x=4x^2+9,$$

$$4x^2-12x+9=0,$$

$$(2x-3)^2=0,$$

$$2x-3=0,$$

$$x=\frac{3}{2}.$$

Gdy $x=\frac{3}{2}$, to $a_2=6x=6\cdot\frac{3}{2}=9$, więc $r=a_2-a_1=9-1=8$. Zatem wzór na *n*-ty wyraz ciągu ma postać

$$a_n=a_1+(n-1)r=1+(n-1)8=8n-7 \text{ dla } n\geq 1.$$

Wyznaczmy te wyrazy ciągu (a_n), które są mniejsze od 150.

$$a_n<150,$$

$$8n-7<150,$$

$$n<\frac{157}{8}=19\frac{5}{8}.$$

Są to więc wyrazy a_1, a_2, a_3, ..., a_{19}. Suma wszystkich tych wyrazów jest więc równa

$$S_{19}=\frac{a_1+a_{19}}{2}\cdot 19=\frac{1+8\cdot 19-7}{2}\cdot 19=1387.$$

Podsumujmy.

Zdobyliśmy 20 punktów- tylko za elementarz matematyczny- czyli znajomość zawartości „ Karty wzorów" i elementarne rachunki!!
Zatem zdaliśmy maturę „z zapasem".

Zastanów się, co u Ciebie zawiodło? Masz jeszcze czas, żeby uzupełnić braki, czego Ci serdecznie życzymy!