# PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

## ZADANIA ZAMKNIĘTE

| Nr zad. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odp. | C | B | C | B | B | C | A | D | C | B | C | D |

| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | C | D | A | D | C | A | C | C | B | C | C |

## ZADANIA OTWARTE

**Zadanie 26.**

$-(x+4)^2 - 1 < 2(x+4)$

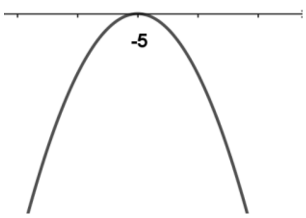
$-(x^2 + 8x + 16) - 1 < 2x + 8$

$-x^2 - 8x - 16 - 1 - 2x - 8 < 0$

$-x^2 - 10x - 25 < 0$

$\Delta = 0,\ x_0 = -5$

$x \in R \setminus \{-5\}$




*Proponowana punktacja:*

1 pkt – wyznaczenie miejsca zerowego odpowiedniego trójmianu

2 pkt – pełne rozwiązanie

**Zadanie 27.**

Nierówność $y^2 + x^2 \geq 4(xy + y - y^2 - 1)$ przekształcamy w sposób równoważny

$y^2 + x^2 \geq 4xy + 4y - 4y^2 - 4$

$y^2 - 4y + 4 + x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$

$(y - 2)^2 + (x - 2y)^2 \geq 0$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y: $(y - 2)^2 \geq 0$ i $(x - 2y)^2 \geq 0$,

stąd $(y - 2)^2 + (x - 2y)^2 \geq 0$.

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – zapisanie nierówności w postaci $(y - 2)^2 + (x - 2y)^2 \geq 0$

2 pkt – pełny dowód

**Zadanie 28.**

Z treści zadania wynika, że $p = \frac{1}{2} = -\frac{b}{2\cdot 2}$, stąd $b = -2$.

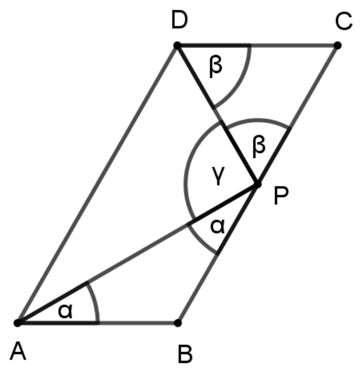
$f(-1) = 2 - 2 \cdot (-1) + c = 7$, zatem $c = 3$.

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – wyznaczenie b albo c

2 pkt – wyznaczenie b i c

**Zadanie 29.**




$|AB| = |BP|$, trójkąt ABP jest równoramienny

stąd $|\measuredangle BAP| = |\measuredangle APB| = \alpha$, $|\measuredangle ABP| = 180^0 - 2\alpha$

$|DC| = |CP|$, trójkąt BCD jest równoramienny

zatem $|\measuredangle PDC| = |\measuredangle CPD| = \beta$, $|\measuredangle DCP| = 180^0 - 2\beta$.

Czworokąta ABCD jest równoległobokiem,

więc $(180^0 - 2\alpha) + (180^0 - 2\beta) = 180^0$.

Stąd $\alpha + \beta = 90^0$.

$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, zatem $\gamma = 90^0$, $\measuredangle APD$ jest kątem prostym.

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – uzasadnienie, że $\alpha + \beta = 90^0$

2 pkt – pełny dowód

**Zadanie 30.**

x, y – szukane liczby takie, że (1) $x - y = 10$ i (2) $x^2 + y^2 = 80$.

Zatem $(x - y)^2 = 100$, więc $x^2 - 2xy + y^2 = 100$ ($x^2 + y^2 - 2xy = 100$).

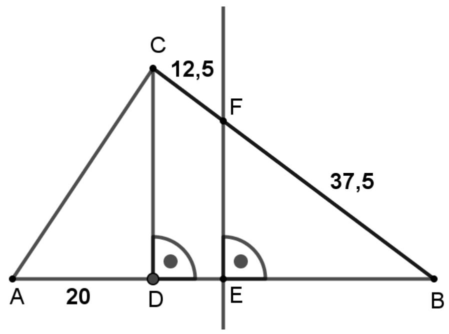
Stąd i z (2) dostajemy $80 - 2xy = 100$, zatem $xy = -10$.

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – zapisanie warunków jakie muszą spełniać szukane liczby i poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

2 pkt – rozwiązanie pełne

**Zadanie 31.**




Trójkąty EBF i DBC są podobne,

zatem $\frac{|BF|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|BD|} = \frac{37{,}5}{50} = \frac{3}{4}$

stąd $|BE| = \frac{3}{4}|BD| = \frac{3}{4}(|AB| - 20)$

ale $|BE| = \frac{1}{2}|AB|$

więc kolejno: $\frac{3}{4}|AB| - 15 = \frac{1}{2}|AB|$, $\frac{1}{4}|AB| = 15$,

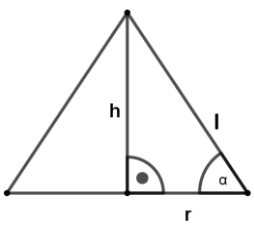
otrzymujemy $|AB| = 60$.

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – wskazanie trójkątów podobnych, zapisanie odpowiedniej proporcji i warunku $|BE| = \frac{1}{2}|AB|$

2 pkt – rozwiązanie pełne

**Zadanie 32.**




$\cos\alpha = \frac{12}{13} = \frac{r}{l}$

Niech $r = 12x$ i $l = 13x$, gdzie $x > 0$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $h^2 = (13x)^2 - (12x)^2 = 25x^2$,

zatem $h = 5x$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 144x^2 \cdot 5x = 30\pi$

Stąd $x^3 = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{2}$, więc $r = 6$, $l = 6{,}5$.

$P_c = \pi r^2 + \pi r l = 75\pi$.

*Proponowana punktacja:*

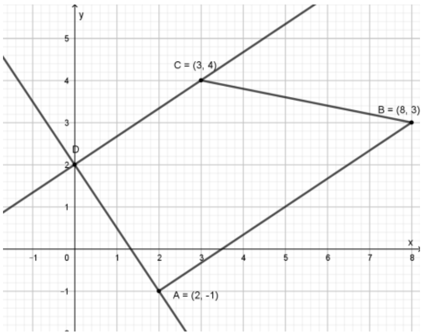
1 pkt – sporządzenie rysunku z oznaczeniami, zaznaczenie kąta α i zapisanie, że $\cos\alpha = \frac{r}{l}$

2 pkt – wyrażenie objętości stożka za pomocą jednej zmiennej

3 pkt – rozwiązanie równania

4 pkt – obliczenie pola powierzchni całkowitej stożka

**Zadanie 33.**




Wyznaczamy równanie prostej AB: $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

Wyznaczamy równanie prostej CD (prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C): $y = \frac{2}{3}x + 2$

Wyznaczamy równanie prostej AD (prostej prostopadłej do AB i przechodzącej przez punkt A): $y = -\frac{3}{2}x + 2$

Wyznaczamy współrzędne punktu D (rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ y = -\frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$) D = (0, 2).

Obliczamy |AB| = $2\sqrt{13}$, |CD| = $\sqrt{13}$ i |AD| = $\sqrt{13}$ i pole trapezu P = $\frac{(2\sqrt{13}+\sqrt{13})\sqrt{13}}{2} = \frac{39}{2}$

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – napisanie równania prostej AB
2 pkt – napisanie równania prostej CD albo prostej AD
3 pkt – napisanie równania prostej CD i równania prostej AD
4 pkt – wyznaczenie współrzędnych punktu D
5 pkt – obliczenie pola trapezu

**Zadanie 34.**

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 6 - 2020 = -2014$
Wyznaczamy liczbę wszystkich ujemnych wyrazów tego ciągu 6n – 2020 < 0, stąd $n < 336\frac{2}{3}$, zatem $a_1, a_2, \ldots, a_{336}$ to wszystkie ujemne wyrazy tego ciągu. Obliczamy $a_{336} = 6 \cdot 336 - 2020 = -4$ oraz $S_{336} = \frac{-2014+(-4)}{2} \cdot 336 = -339024$

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – obliczenie pierwszego wyrazu ciągu albo zapisanie warunku pozwalającego obliczyć liczbę ujemnych wyrazów ciągu
2 pkt – obliczenie $a_1$ i zapisanie warunku pozwalającego obliczyć liczbę ujemnych wyrazów ciągu
3 pkt – obliczenie $a_1$ i liczby wszystkich ujemnych wyrazów tego ciągu
4 pkt – obliczenie sumy wszystkich ujemnych wyrazów ciągu.