## ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | A | B | C | A | A | C | C | D | A | C | B | D | B |

| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | C | C | B | C | C | D | A | C | A | B | A | A | C |

## PROPOZYCJE ROZWIĄZAŃ I PUNKTACJA DO ZADAŃ OTWARTYCH

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w propozycji należy przyznać zdającemu maksymalną liczbę punktów.
Za częściowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona w poniższej propozycji należy przyznać zdającemu liczbę punktów adekwatną do wykonanych czynności.

**Zadanie 29. (0 – 2)**

*Przykładowe rozwiązanie:*

$-2x(x-3) \geq x-3$

$-2x^2+6x-x+3 \geq 0$

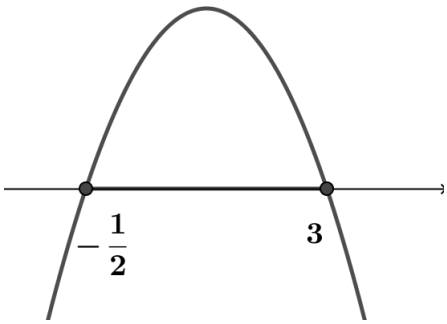
$-2x^2+5x+3 \geq 0$

lub $-2x(x-3)-(x-3) \geq 0$

$(x-3)(-2x-1) \geq 0$

$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 3$

Obliczamy $\Delta = 49$ stąd $x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 3$




Odp. $x \in \langle -\frac{1}{2}, 3 \rangle$

*Proponowana punktacja:*

1 pkt – wyznaczenie miejsc zerowych odpowiedniego trójmianu kwadratowego

2 pkt – pełne rozwiązanie.

## Zadanie 30. (0 – 2)

*Przykładowe rozwiązanie*

Równanie ma sens liczbowy dla $x \neq 3$.
Przekształcamy równanie

$$\frac{3x^2 - 3x - 18}{2x - 6} = 2x + 5$$

$$3x^2 - 3x - 18 = (2x + 5)(2x - 6)$$

$$3x^2 - 3x - 18 = 4x^2 - 12x + 10x - 30$$

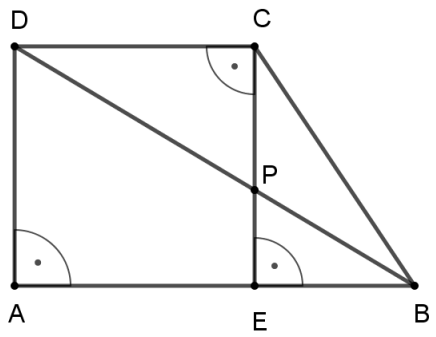
$$-x^2 - x + 12 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49$,
stąd $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$. Pierwiastek $x_2$ nie spełnia założenia, zatem rozwiązaniem danego równania jest liczba: $-4$.

*Proponowana punktacja:*
1 pkt – poprawne przekształcenie danego równania do równania kwadratowego
2 pkt – pełne rozwiązanie.

## Zadanie 31 (0 – 2)

*Przykładowe rozwiązanie*




Trójkąty PCD oraz PEB są prostokątne, zatem promień okręgu opisanego na trójkącie PEB ma długość $\frac{|PB|}{2}$, zaś promień okręgu opisanego na trójkącie PCD jest równy $\frac{|PD|}{2}$, stąd szukany stosunek promieni okręgów jest równy $\frac{\frac{|PB|}{2}}{\frac{|PD|}{2}} = \frac{|PB|}{|PD|}$.

$\Delta BEP \sim \Delta DCP$ $(kkk)$ (są to trójkąty prostokątne oraz EPB i CPD są kątami wierzchołkowymi, więc mają równe miary) zatem $\frac{|PB|}{|PD|} = \frac{|EB|}{|CD|} = \frac{|AB| - |AE|}{|CD|} = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{a}{b} - 1$.
To należało wykazać.

*Proponowana punktacja:*
1 pkt – uzasadnienie, że szukany stosunek jest równy $\frac{|PB|}{|PD|}$
2 pkt – pełne rozwiązanie.

**Zadanie 32. (0 – 2)**

*Przykładowe rozwiązanie*

Z założenia wiemy, że $x + y = 2$, stąd obliczamy $y = 2 - x$, podstawiamy do nierówności, którą mamy wykazać i przekształcamy ją w sposób równoważny

$$x^2 + (2 - x)^2 \geq 2$$
$$x^2 + 4 - 4x + x^2 \geq 2$$
$$2x^2 - 4x + 2 \geq 0$$
$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$
$$(x - 1)^2 \geq 0$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x$ (kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną), zatem prawdziwa jest też nierówność, którą mieliśmy udowodnić.

*Proponowana punktacja:*
1 pkt – doprowadzenie lewej strony nierówności do wyrażenia z jedną zmienną i poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy $[(2 - x)^2]$
2 pkt – pełne rozwiązanie.

**Zadanie 33. (0 – 2)**

*Przykładowe rozwiązanie*

$a_4 = a_3 + r$, gdzie $r$ – różnica ciągu arytmetycznego $(a_n)$
32 = 38 + $r$, stąd $r$ = – 6,
$a_3 = a_1 + 2r$, $a_1 + 2 \cdot (-6) = 38$ zatem $a_1 = 50$
Zapisujemy wzór ogólny $a_n = 50 + (n - 1) \cdot (-6) = 56 - 6n$.
Rozwiązujemy nierówność 56 – 6 $n$ > 0, stąd $n < \frac{56}{6} = 9\frac{1}{3}$ i $n$ jest liczbą naturalną dodatnią.
Ten ciąg ma 9 wyrazów dodatnich.

*Proponowana punktacja:*
1 pkt – wyznaczenie $a_1$ i $r$
2 pkt – pełne rozwiązanie

**Zadanie 34. (0 – 2)**

*Przykładowe rozwiązanie*
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb $(a, b)$,
gdzie $a, b \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ i $a \neq b$.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$.
Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu

| | -2 | - 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| - 2 | | -3 | - 2 | - 1 | 0 | 1 |
| - 1 | - 3 | | - 1 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | - 2 | - 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 1 | - 1 | 0 | 1 | | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |

- tak oznaczono zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A

|A| = 12, stąd $P(A) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

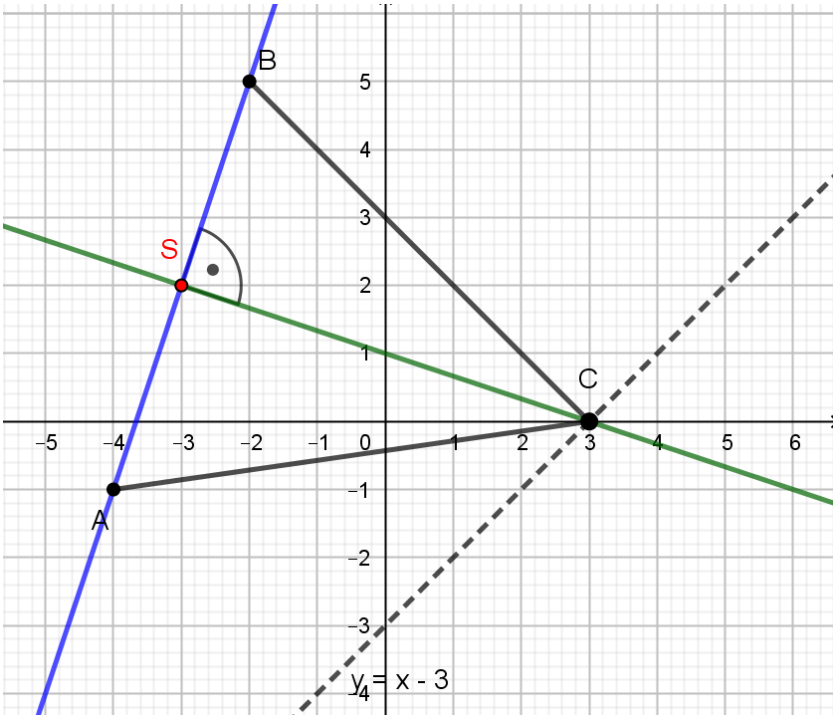
*Proponowana punktacja:*

1 pkt – wyznaczenie $|\Omega|$ albo |A|

2 pkt – rozwiązanie pełne

**Zadanie 35. (0 – 5)**

*Przykładowe rozwiązanie*




Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB: $a = \frac{5-(-1)}{-2-(-4)} = \frac{6}{2} = 3$.

Zatem współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB jest równy $a_1 = -\frac{1}{3}$.

Symetralna przechodzi przez środek odcinka AB (punkt S).

Obliczamy współrzędne punktu S: S = $\left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (-3,2)$.

Symetralna odcinka AB ma równanie: $y - 2 = -\frac{1}{3}\big(x - (-3)\big)$

$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

Punkt C leży na tej symetralnej oraz na prostej $y = x - 3$. Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$ i otrzymujemy współrzędne punktu C = (3, 0).

Obliczamy |AB| = $\sqrt{(-2-(-4))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$,
wysokość trójkąta ABC h = |CS| = $\sqrt{(-3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$,
a następnie pole trójkąta ABC $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 20$.

*Proponowana punktacja:*

Za każdy z etapów rozwiązania przyznajemy 1 pkt:

- zapisanie równania prostej AB albo tylko obliczenie współczynnika kierunkowego tej prostej,
- wyznaczenie współrzędnych środka odcinka AB,
- zapisanie równania symetralnej odcinka AB,
- wyznaczenie współrzędnych punktu C,
- obliczenie pola trójkąta ABC.