Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

# EGZAMIN MATURALNY 2010

# MATEMATYKA

## POZIOM ROZSZERZONY

## Klucz punktowania odpowiedzi

MAJ 2010

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

**Zadanie 1. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Modelowanie matematyczne | Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną |

**I sposób rozwiązania** (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

| $x\in(-\infty,-2)$ | $x\in\langle -2,1)$ | $x\in\langle 1,\infty)$ |
|---|---|---|
| $-2x-4-x+1\le 6$<br>$-3x\le 9$<br>$x\ge -3$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-3\le x<-2$ | $2x+4-x+1\le 6$<br>$x\le 1$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-2\le x<1$ | $2x+4+x-1\le 6$<br>$3x\le 3$<br>$x\le 1$<br>W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x=1$ |

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3\le x\le 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -3,1\rangle$.

**II sposób rozwiązania** (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1<0\end{cases}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}$<br>$\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 2x+4+x-1\le 6\end{cases}$<br>$\begin{cases}x\ge -2\\ x\ge 1\\ 3x\le 3\end{cases}$<br>$\begin{cases}x\ge -2\\ x\ge 1\\ x\le 1\end{cases}$<br>$x=1$ | $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1<0\end{cases}$<br>$\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1<0\\ 2x+4-x+1\le 6\end{cases}$<br>$\begin{cases}x\ge -2\\ x<1\\ x\le 1\end{cases}$<br>$x\in\langle -2,1)$ | $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1\ge 0\end{cases}$<br>niemożliwe | $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1<0\end{cases}$<br>$\begin{cases}2x+4<0\\ x-1<0\\ -2x-4-x+1\le 6\end{cases}$<br>$\begin{cases}x<-2\\ x<1\\ -3x\le 9\end{cases}$<br>$\begin{cases}x<-2\\ x<1\\ x\ge -3\end{cases}$<br>$x\in\langle -3,-2)$ |

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3\le x\le 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -3,1\rangle$.

**<u>Schemat oceniania</u>**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 1 pkt**

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

albo

- zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+4\ge 0 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4\ge 0 \\ x-1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4<0 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4<0 \\ x-1<0 \end{cases}$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 2 pkt**

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x\in(-\infty,-2)$ $\quad -2x-4-x+1\le 6$

II. $x\in\langle -2,1)$ $\quad 2x+4-x+1\le 6$

III. $x\in\langle 1,\infty)$ $\quad 2x+4+x-1\le 6$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ........................................................ 3 pkt**

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że jeden jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

**Rozwiązanie pełne ................................................................................................................ 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\langle -3,1\rangle$.

**<u>III sposób rozwiązania</u>** (graficznie)

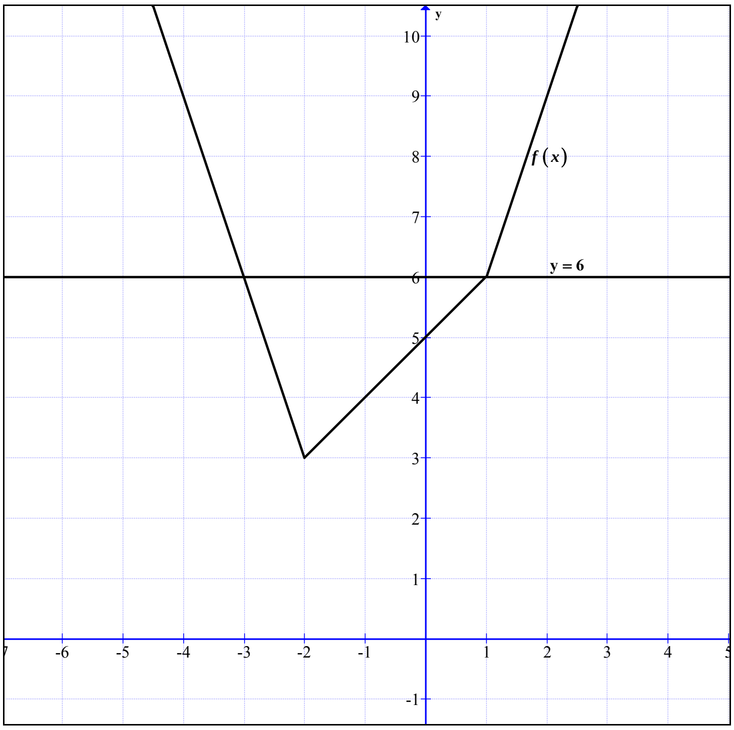
Rysujemy wykresy funkcji $f(x)=|2x+4|+|x-1|$ i prostą o równaniu $y=6$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

Zapisujemy wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x)=\begin{cases} -3x-3 & \text{dla } x\in(-\infty,-2) \\ x+5 & \text{dla } x\in\langle -2,1) \\ 3x+3 & \text{dla } x\in\langle 1,\infty) \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji $f$ i prostą o równaniu $y=6$




Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresu funkcji $f$ i prostej o równaniu $y = 6$:
$x = -3$ i $x = 1$.
Podajemy argumenty, dla których $f(x) \le 6$: $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

**<u>Schemat oceniania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................................... 1 pkt**

Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty, -2)$, $\langle -2, 1)$, $\langle 1, \infty)$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ...................................................................... 2 pkt**

Zdający zapisze wzór funkcji $f$ w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -2)$ $f(x) = -3x - 3$

II. $x \in \langle -2, 1)$ $f(x) = x + 5$

III. $x \in \langle 1, \infty)$ $f(x) = 3x + 3$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x + 5 & \text{dla } x \in \langle -2, 1) \\ 3x + 3 & \text{dla } x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 3 pkt**

Zdający narysuje wykres funkcji $f$ i prostą o równaniu $y = 6$.

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................... 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

**Zadanie 2. (0–4)**

| Modelowanie matematyczne | Rozwiązanie równania trygonometrycznego |
|---|---|

**<u>Rozwiązanie</u>**

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna:

$2\left(1-\sin^2 x\right)-5\sin x-4=0$

Porządkujemy to równanie i wprowadzamy niewiadomą pomocniczą:

$-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$ , $t=\sin x$, gdzie $t\in\langle -1,1\rangle$. Równanie przyjmuje teraz postać:

$2t^2+5t+2=0$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze zmienną *t*:

$\Delta=9 \qquad t_1=-2 \quad t_2=-\frac{1}{2}$ ale $t_1\notin\langle -1,1\rangle$

Zapisujemy rozwiązania równania $\sin x=-\frac{1}{2}$ należące do przedziału $\langle 0,2\pi\rangle$ :

$x=\frac{11\pi}{6}$ i $x=\frac{7}{6}\pi$ .

**<u>Schemat oceniania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ............................................................................ 1 pkt**

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.

$-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$ lub $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .................................................................... 2 pkt**

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t=\sin x$, zapisanie równania w postaci

$-2t^2-5t-2=0$ lub $2t^2+5t+2=0$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .................................................................... 3 pkt**

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t=-2$ lub $t=-\frac{1}{2}$) i odrzucenie rozwiązania $t=-2$.

<u>Uwaga</u>

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest $\sin x$) i zapisać rozwiązanie w postaci $\sin x=-\frac{1}{2}$ lub $\sin x=-2$ oraz zapisać, że równanie $\sin x=-2$ jest sprzeczne.

**Rozwiązanie pełne .......................................................................................................... 4 pkt**

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

$x=\frac{7}{6}\pi$ lub $x=\frac{11}{6}\pi$

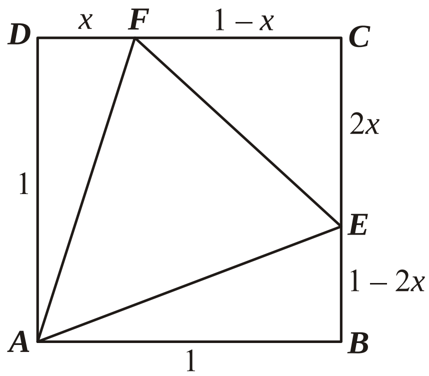
albo

$x=210^\circ$ lub $x=330^\circ$

**Zadanie 3. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Użycie strategii do rozwiązywania problemów | Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego |

**Rozwiązanie**




Długości odcinków $|BE|$ i $|CF|$ są następujące: $|BE| = 1 - 2x$, $|CF| = 1 - x$.

Pole trójkąta *AEF* jest więc równe:

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{FDA} = 1 - \frac{1}{2}(1-2x) - \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(1-x) - \frac{1}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Pole trójkąta *AEF* jest funkcją zmiennej *x*: $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Ponieważ $x_w = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, a parabola o równaniu $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla $x = \frac{1}{4}$ pole trójkąta *AEF* jest najmniejsze.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ........................................................................................................ 1 pkt**

Zapisanie, że $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$ lub $P_{AEF} = P_{ABCD} - \left(P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE}\right)$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ............................................................ 2 pkt**

Zapisanie pól trójkątów *ADF*, *ABE* i *CEF*: $P_{\Delta ADF} = \frac{1}{2}x$, $P_{\Delta ABE} = \frac{1-2x}{2}$ i $P_{\Delta CEF} = \frac{-2x^2+2x}{2} = -x^2 + x$.

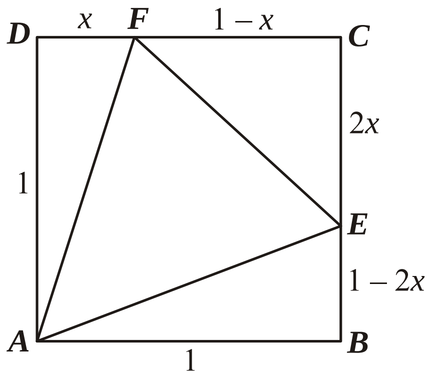
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ............................................................ 3 pkt**

Zapisanie $P_{AEF}$ w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej *x*: $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................ 4 pkt**

Wyznaczenie *x*, dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x = \frac{1}{4}$.

**II sposób rozwiązania** (geometria analityczna)




Przyjmujemy współrzędne punktów na płaszczyźnie: $A=(0,0), F=(x,1), E=(1,1-2x)$.

Wyznaczamy pole trójkąta $AFE$:

$$P=\frac{1}{2}\left|(x-0)(1-2x-0)-(1-0)(1-0)\right|=\frac{1}{2}\left|x(1-2x)-1\right|=\frac{1}{2}\left|x-2x^2-1\right|=\frac{1}{2}\left|2x^2-x+1\right|$$

$$P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Ponieważ $x_w=-\frac{-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$, a parabola o równaniu $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla $x=\frac{1}{4}$ pole trójkąta *AEF* jest najmniejsze.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ........................................ 1 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych punktów na płaszczyźnie:
$A=(0,0), F=(x,1), E=(1,1-2x)$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................ 2 pkt**

Wyznaczenie pola trójkąta $AFE$:

$$P=\frac{1}{2}\left|(x-0)(1-2x-0)-(1-0)(1-0)\right|=\frac{1}{2}\left|x(1-2x)-1\right|=\frac{1}{2}\left|x-2x^2-1\right|=\frac{1}{2}\left|2x^2-x+1\right|$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................ 3 pkt**

Zapisanie $P_{AEF}$ w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej *x*: $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

**Rozwiązanie pełne ........................................ 4 pkt**

Wyznaczenie *x*, dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x=\frac{1}{4}$.

**Zadanie 4. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Użycie strategii do rozwiązywania problemów | Stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianów |

**Rozwiązanie**

Korzystając z warunków zadania zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 8+4a+2b+1=7 \\ 27+9a+3b+1=10 \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy $a$ i $b$

$$\begin{cases} 4a+2b=-2 \\ 9a+3b=-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-2a-1 \\ 9a-6a-3=-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-5 \\ b=9 \end{cases}$$

Warunki zadania są spełnione dla $a=-5, \quad b=9$.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania .......................................................................................................................1 pkt**

Zapisanie jednego z równań:

$8+4a+2b+1=7$ albo $27+9a+3b+1=10$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ...............................................................2pkt**

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} 8+4a+2b+1=7 \\ 27+9a+3b+1=10 \end{cases}$$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ................................................................3pkt.**

Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne.......................................................................................................4 pkt.**

Rozwiązanie układu równań: $a=-5$, $b=9$.

**Zadanie 5. (0–5)**

| | |
|---|---|
| Modelowanie matematyczne | Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego |

**I sposób rozwiązania**

Z własności ciągu arytmetycznego mamy: $2b=a+c$. Stąd i z warunków zadania otrzymujemy, że : $2b=10$ czyli $b=5$.

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $(b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19)$.

Zatem otrzymujemy układ równań, np. $\begin{cases} b=5 \\ a+c=10 \\ (b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19) \end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy $a=10-c$ lub $c=10-a$ i wstawiamy do trzeciego równania.

Otrzymujemy równanie, np. $9^2 = (10 - c + 1)(c + 19)$ lub $9^2 = (a + 1)(10 - a + 19)$.

Przekształcamy to równanie i otrzymujemy równanie z niewiadomą $c$ lub $a$, np.
$c^2 + 8c - 128 = 0$ lub $a^2 - 28a + 52 = 0$.
Rozwiązaniem równania są :
$c_1 = 8,\ c_2 = -16$ lub $a_1 = 2,\ a_2 = 26$.

Zatem szukanymi liczbami są: $a = 2,\ b = 5,\ c = 8$ lub $a = 26,\ b = 5,\ c = -16$.

**<u>Schemat oceniania do I sposobu rozwiązania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................................... 1 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $2b = a + c$

albo

- $(b + 4)^2 = (a + 1)(c + 19)$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................ 2 pkt**

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb $a$, $b$, $c$, np.

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ a + c = 10 \\ (b + 4)^2 = (a + 1) \cdot (c + 19) \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................ 3 pkt**

Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą $c$ lub $a$, np.
$c^2 + 8c - 128 = 0$ lub $a^2 - 28a + 52 = 0$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..................................... 4 pkt**

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................ 5 pkt**

Wyznaczenie szukanych liczb: $a = 2,\ b = 5,\ c = 8$ lub $a = 26,\ b = 5,\ c = -16$.

**<u>II sposób rozwiązania</u>**

Oznaczamy: przez $a$ – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez $r$ – różnicę tego ciągu.
Wówczas $b = a + r,\ c = a + 2r$.

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania mamy $2a + 2r = 10$, stąd $a + r = 5$
Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie, np.
$(a + r + 4)^2 = (a + 1)(a + 2r + 19)$,

a następnie zapisujemy układ równań: $\begin{cases} a + r = 5 \\ (a + r + 4)^2 = (a + 1)(a + 2r + 19) \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a = 5 - r$ i podstawiamy do drugiego równania.
Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą *r*:

$(5 - r + r + 4)^2 = (5 - r + 1)(5 - r + 2r + 19)$ lub $r^2 + 18 - 63 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są: $r_1 = 3$ lub $r_2 = -21$.

Następnie obliczamy *a*, *b*, *c*.
Warunki zadania spełniają liczby: $a = 2,\ b = 5,\ c = 8$ lub $a = 26,\ b = 5,\ c = -16$.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................................1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń: *a* – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, *r* – różnica tego ciągu oraz wykorzystanie definicji ciągu arytmetycznego do zapisania odpowiedniego równania, np. $2a + 2r = 10$ lub $a + r = 5$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....................................................................2 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie układu równań, np.

$$\begin{cases} a + r = 5 \\ (a + r + 4)^2 = (a + 1)(a + 2r + 19) \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....................................................................3 pkt**

Przekształcenie układu równań do równania z niewiadomą *r*, np.

$(5 - r + r + 4)^2 = (5 - r + 1)(5 - r + 2r + 19)$ lub $r^2 + 18 - 63 = 0$.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)........................................................4 pkt**

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań, np. $r < 0$ i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne .............................................................................................................5 pkt**

Wyznaczenie liczb spełniających warunki zadania: $a = 2,\ b = 5,\ c = 8$ lub $a = 26,\ b = 5,\ c = -16$.

**Zadanie 6. (0–5)**

| | |
|---|---|
| Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów | Przeprowadzanie dyskusji trójmianu kwadratowego z parametrem |

**I sposób rozwiązania** (wzory Viète'a)

$x^2 + mx + 2 = 0$

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność tego układu:

$\Delta = m^2 - 8$

$\Delta > 0$

$m^2-8>0$

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$

Aby rozwiązać drugą nierówność, najpierw przekształcimy lewą stronę nierówności, korzystając ze wzorów Viète'a:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-m)^2-2\cdot 2=m^2-4$

Rozwiązujemy zatem nierówność:

$m^2-4>2m^2-13$

$m^2-9<0$, więc $m\in(-3,3)$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$ i $m\in(-3,3)$, więc $m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

**<u>II sposób rozwiązania</u>** (wzory na pierwiastki trójmianu)

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>2m^2-13\end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$\Delta=m^2-8$

$\Delta>0 \quad m^2-8>0$

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$

Obliczamy pierwiastki równania kwadratowego:

$x_1=\dfrac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2} \qquad x_2=\dfrac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}$

Obliczamy sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego:

$$x_1^2+x_2^2=\left(\frac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2+\left(\frac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{m^2-2m\sqrt{m^2-8}+m^2-8}{4}+\frac{m^2+2m\sqrt{m^2-8}+m^2-8}{4}=$$

$$=\frac{2m^2+2m^2-16}{4}=m^2-4$$

Rozwiązujemy drugą nierówność:

$m^2-4>2m^2-13$

$m^2-9<0$

$m\in(-3,3)$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$ i $m\in(-3,3)$, więc $m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.

**<u>Schemat oceniania</u>**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$, $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$.
Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwaga
Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$, $m \in (-3,3)$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).
Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........ 1 pkt**

- zapisanie nierówności $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ w postaci równoważnej $m^2 - 4 > 2m^2 - 13$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności
$$\left(\frac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2 > 2m^2 - 13.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ........ 2 pkt**

Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej $m^2 - 9 < 0$.

**Rozwiązanie bezbłędne części b) ........ 3 pkt**

Rozwiązanie nierówności: $m \in (-3,3)$.

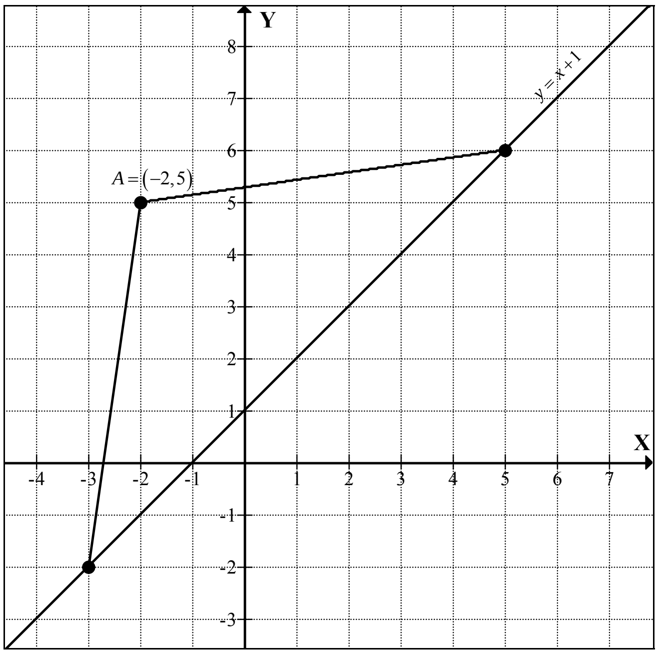
**Rozwiązanie pełne ........ 5 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:
$m \in \left(-3,-2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2},3\right)$.

**Zadanie 7. (0–6)**

| | |
|---|---|
| Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów | Stosowanie równań i nierówności do opisania zależności w prostokątnym układzie współrzędnych |

**Rozwiązanie**



Obliczamy odległość punktu *A* od prostej $y = x + 1$: $d = \frac{|-2-5+1|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$.

Obliczona odległość *d* jest równa długości wysokości trójkąta *ABC* poprowadzonej do boku *BC*. Znamy pole trójkąta *ABC*, więc obliczamy długość boku *BC*.

$P_{ABC} = 15$ stąd $\frac{1}{2} d \cdot |BC| = 15$ , więc $|BC| = \frac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

Punkt $C = (x, y)$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, zatem $C = (x, x+1)$. Z warunków zadania mamy $|AC| = |BC|$, więc ze wzoru na długość odcinka zapisujemy równanie:

$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2}$ .

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2} \quad (\ )^2$

$x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = 50$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = 64 \qquad x_1 = 5 \qquad x_2 = -3$

Obliczamy rzędne punktów: $y_1 = 6 \quad y_2 = -2$

Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C_1 = (5, 6) \quad C_2 = (-3, -2)$.

__Schemat oceniania__

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ........................................................................ 1 pkt**

Obliczenie odległości punktu *A* od prostej $y = x + 1$: $d = 3\sqrt{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 pkt**

Obliczenie długości odcinków *AC* i *BC*: $|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 4 pkt**

Ułożenie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu *C* (odległość $|AC| = 5\sqrt{2}$ oraz punkt *C* należy do prostej o równaniu $y = x + 1$)

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x+2)^2 + (y-5)^2 = 50 \end{cases}$$

i sprowadzenie układu do równania kwadratowego: $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ........................................................................ 5 pkt**

**Rozwiązanie pełne ........................................................................ 6 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych punktu *C*: $C = (5{,}6)$ lub $C = (-3{,}-2)$.

**Zadanie 8. (0–5)**

| | |
|---|---|
| Stosowanie rozumowania i argumentacji | Przeprowadzenie dowodu algebraicznego |

**Rozwiązanie**

Zapisujemy współrzędne dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi $Ox$, np. $A=\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$, $B=\left(-x,\frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x\neq 0$.

Zapisujemy pole trójkąta $ABC$, gdzie $C=\left(3,-1\right)$ w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{2\cdot|x|\cdot\left|\frac{1}{x^2}+1\right|}{2}=\frac{1}{|x|}+|x|.$$

Wystarczy wobec tego udowodnić, (lub powołać się na znaną nierówność), że dla dowolnej liczby $a>0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a}+a\geq 2$. Po pomnożeniu obu stron nierówności przez $a$ otrzymujemy nierówność równoważną $1+a^2\geq 2a$, czyli $a^2-2a+1\geq 0$, a więc nierówność $\left(a-1\right)^2\geq 0$.

**Schemat oceniania**

Uwaga

Zdający otrzymuje 0 punktów, jeżeli wybierze konkretne dwa punkty $A$ oraz $B$ i dla tych punktów obliczy pole trójkąta $ABC$.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania ........................................................................................ 1 pkt**

Zapisanie współrzędnych dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi $Ox$, np. $A=\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$, $B=\left(-x,\frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x\neq 0$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 pkt**

Zapisanie długości odcinka $AB$ ($|AB|=2|x|$) oraz wysokości $h$ trójkąta $ABC$ ($h=\frac{1}{x^2}+1$).

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 3 pkt**

Zapisanie pola trójkąta $ABC$ w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{2\cdot|x|\cdot\left|\frac{1}{x^2}+1\right|}{2}=\frac{1}{|x|}+|x|$$

Uwaga

Zdający może założyć, że $x>0$ i zapisać wzór na pole trójkąta w postaci:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{2\cdot x\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{2}=\frac{1}{x}+x$$

**Rozwiązanie pełne** ........................................................................................................ **5pkt**

Uzasadnienie, że $\frac{1}{|x|}+|x|\geq 2$.

Zdający może powołać się na (znane) twierdzenie o sumie liczby dodatniej i jej odwrotności.

**Zadanie 9. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Stosowanie rozumowania i argumentacji | Przeprowadzenie dowodu geometrycznego |

**Rozwiązanie**

Czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem, czworokąt *DCFE* jest kwadratem, więc $|AB|=|CD|=|CF|$. W kwadracie *CBHG* odcinki *BC* i *CG* są równe.

Niech $\alpha$ oznacza kąt *ABC* danego równoległoboku. Wówczas $|\sphericalangle BCD|=180^\circ-\alpha$.

W kwadratach *CDEF* oraz *CBHG* mamy $|\sphericalangle DCF|=|\sphericalangle DCF|=90^\circ$, więc

$|\sphericalangle FCG|=360^\circ-\left(180^\circ-\alpha\right)-90^\circ-90^\circ=\alpha=|\sphericalangle ABC|$.

W trójkątach *ABC* i *FCG* mamy zatem: $|AB|=|CF|$, $|BC|=|CG|$ oraz $|\sphericalangle FCG|=|\sphericalangle ABC|$, więc trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające (cecha *bkb* ). Stąd wnioskujemy, że $|AC|=|FG|$.

**Schemat oceniania:**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........................................................................................................ **1 pkt**

Zaznaczenie na rysunku odcinków *AC* i *FG* oraz zapisanie równości $|AB|=|CF|$ i $|BC|=|CG|$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........................................................................ **2 pkt**

Stwierdzenie, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające, na podstawie cechy (*bkb*), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG|=|\sphericalangle ABC|$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........................................................................ **3 pkt**

Stwierdzenie, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające, wraz z podaniem pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG|=|\sphericalangle ABC|$.

**Rozwiązanie pełne** ........................................................................................................ **4 pkt**

Zapisanie wniosku, że $|AC|=|FG|$.

**Zadanie 10. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Modelowanie matematyczne | Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa |

**Rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny. $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1. Suma kwadratów trzech liczb będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1.
Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.
Kwadraty liczb 1, 2, 4 i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1.
$|A|$ możemy obliczać następująco:

I sposób

- ciągi o wartościach ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2^3 = 8$,
- ciągi o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4^3 = 64$,

czyli $|A| = 2^3 + 4^3 = 72$

II sposób

- ciągi stałe – jest ich 6,
- ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2 \cdot 3 = 6$,
- ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$,
- ciągi różnowartościowe o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$,

czyli $|A| = 6 + 6 + 36 + 24 = 72$,

III sposób

- ciągi, w których występują liczby dające tę sama resztę przy dzieleniu przez 3 – jest ich $3 \cdot 2^3 = 24$,
- ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2 – jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,
- ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 2 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 – jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,

czyli $|A| = 24 + 24 + 24 = 72$,

Zatem $P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania ....................................................................................................... 1 pkt**

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 6^3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Istotny postęp. ........................................................................................................ 2 pkt**

Zdający zapisze, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ................................................................ 3 pkt**

Zdający poprawnie obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia $A$: $|A| = 72$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................ 4 pkt**

$P(A) = \frac{1}{3}$

**Zadanie 11. (0–5)**

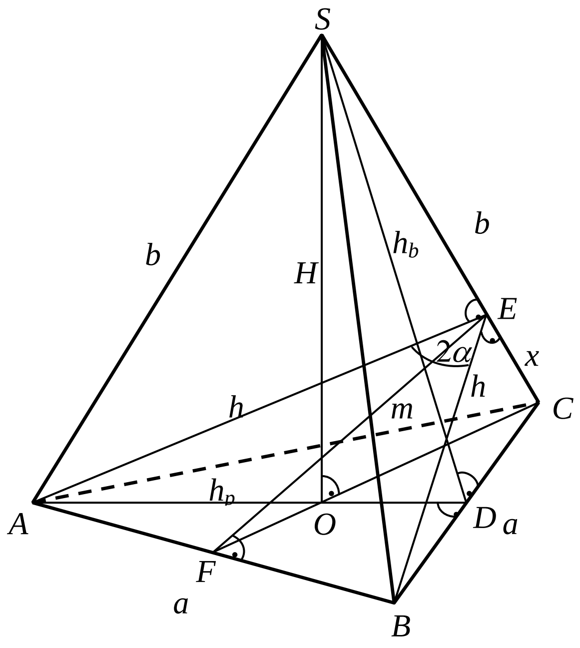
| | |
|---|---|
| Użycie i stosowanie strategii do rozwiązywania problemów | Obliczanie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii |

Uwaga

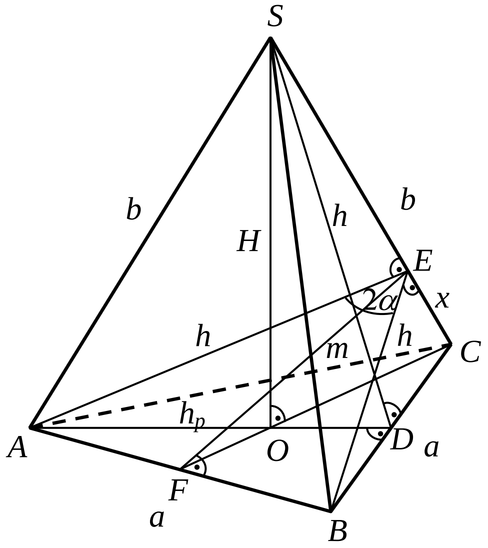
Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. W każdym z nich wyróżniamy następujące etapy rozwiązania

- Poprawna interpretacja bryły i podanego kąta dwuściennego w tej bryle.
- Wyznaczenie $m$ lub $h$ w zależności od $a$ i $\alpha$.
- Wyznaczenie jednej z wielkości: $x$, $b$, $h_b$ (w zależności od $a$ i $\alpha$), z której można już wyznaczyć $H$.
- Wyznaczenie $H$ w zależności od $a$ i $\alpha$.
- Wyznaczenie $V$ w zależności od $a$ i $\alpha$.

Użyliśmy oznaczeń jak na rysunku



**Rozwiązanie** (wyznaczenie *m*, wyznaczenie *x*, wyznaczenie *H* z podobieństwa trójkątów *OCS* i *ECF*)




Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wyznaczamy wysokość *FE* trójkąta równoramiennego *ABE*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}, \text{ stąd } m = \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

Wyznaczamy długość odcinka *EC* z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *FCE*:

$$x = \sqrt{h_p^{\ 2} - m^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{4\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów *OCS* i *ECF* mamy

$$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}, \text{ czyli } \frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}.$$

$$\text{Stąd } H = \frac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \frac{\frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}.$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a^3\cos\alpha}{12\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}.$$

**<u>Schemat oceniania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................................................1 pkt**

Wykonanie rysunku ostrosłupa i zaznaczenie na nim kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

Uwaga
Nie wymagamy rysunku, jeżeli z dalszych obliczeń wynika, że zdający poprawnie interpretuje treść zadania.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny .......................................................................... 2 pkt**

Wyznaczenie wysokości *EF* trójkąta *ABE* w zależności od $a$ i $\alpha$: $m = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ...................................................................... 3 pkt**

Wyznaczenie długości odcinka *EC*: $x = \dfrac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$.

**Rozwiązanie prawie całkowite.................................................................................. 4 pkt**

Wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = \dfrac{a\cos\alpha}{\sqrt{3\left(4\sin^2\alpha - 1\right)}}$.

**Rozwiązanie pełne ....................................................................................... 5 pkt**

Wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \dfrac{1}{12}\dfrac{a^3\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.